

計算の元素

Xavier Défago (デファゴ・クサヴィエ)

School of Computing, Science Tokyo, Japan

東京科学大学・情報理工学院 (旧東工大)

自己紹介

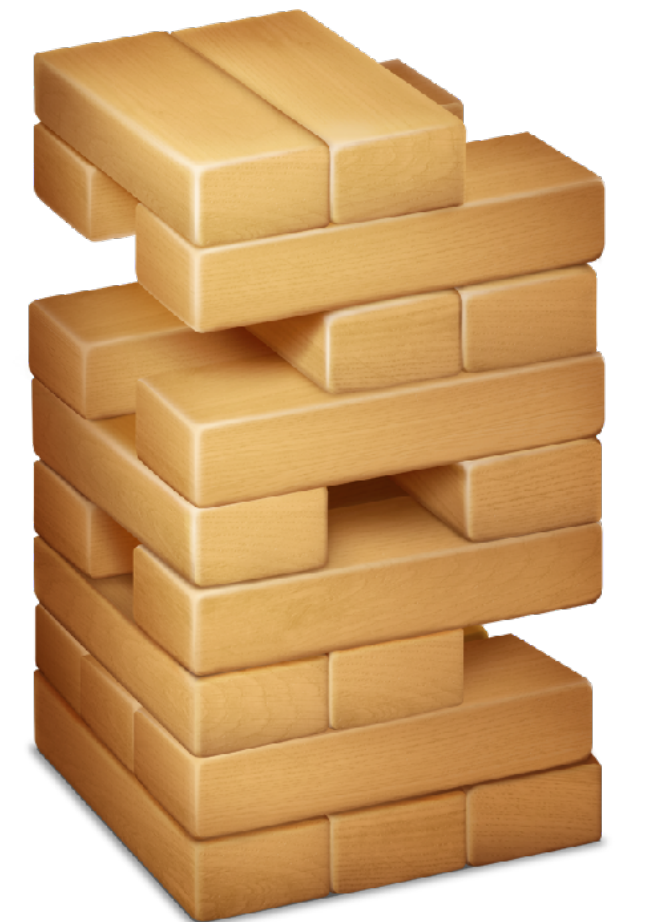
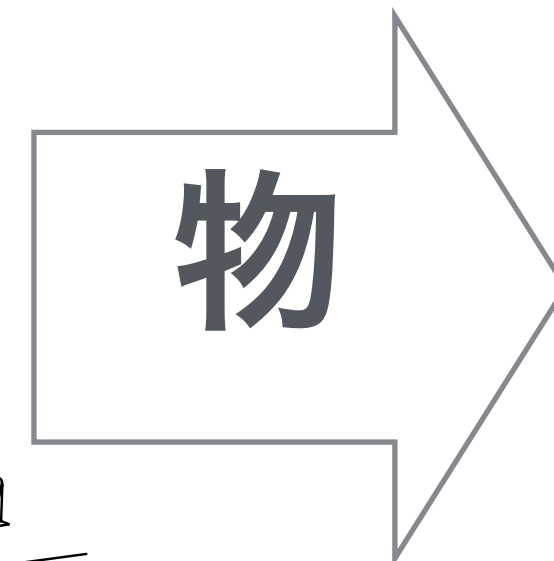
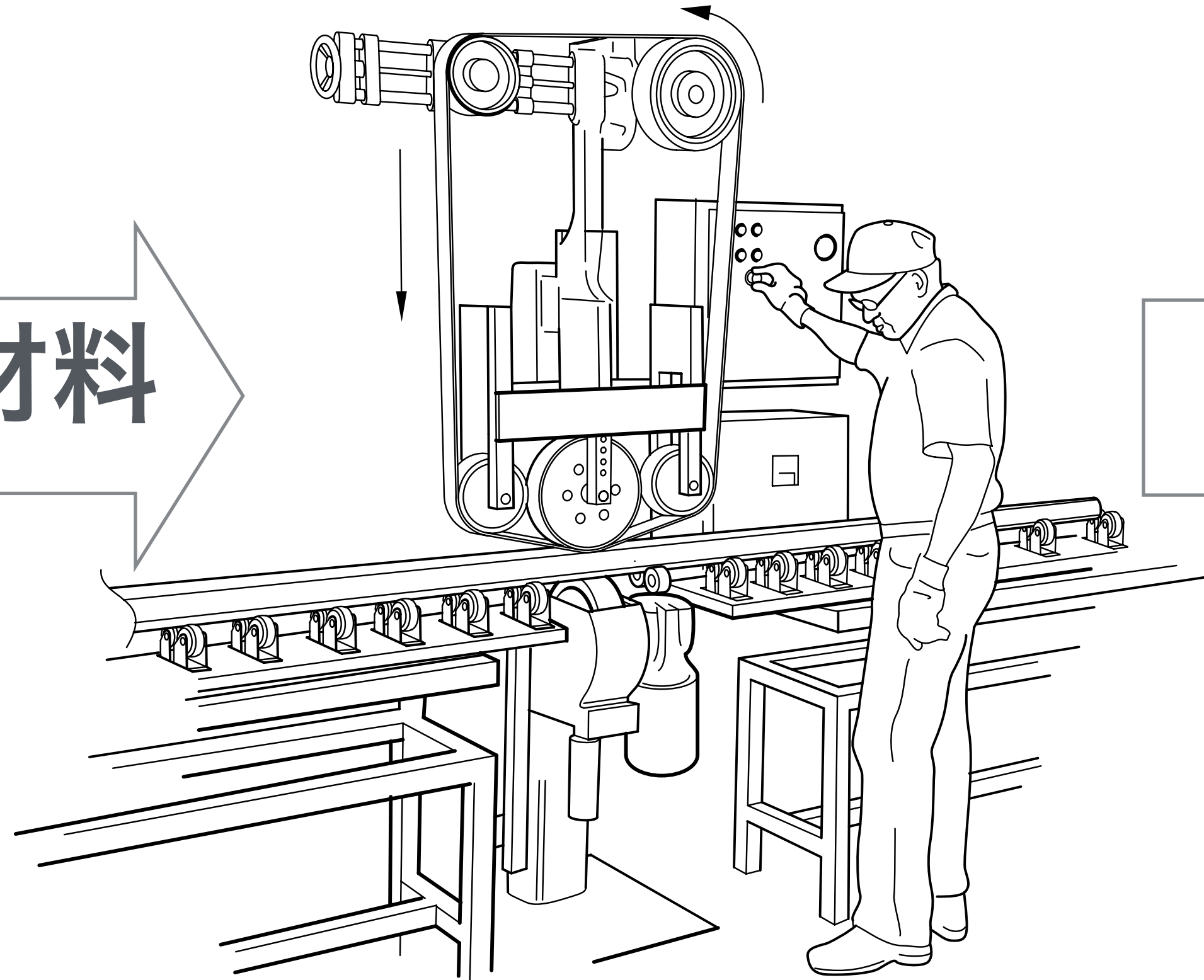
概要

コンピューターって何？



コンピューターって何？

コンピューターは
機械



コンピューターって何？

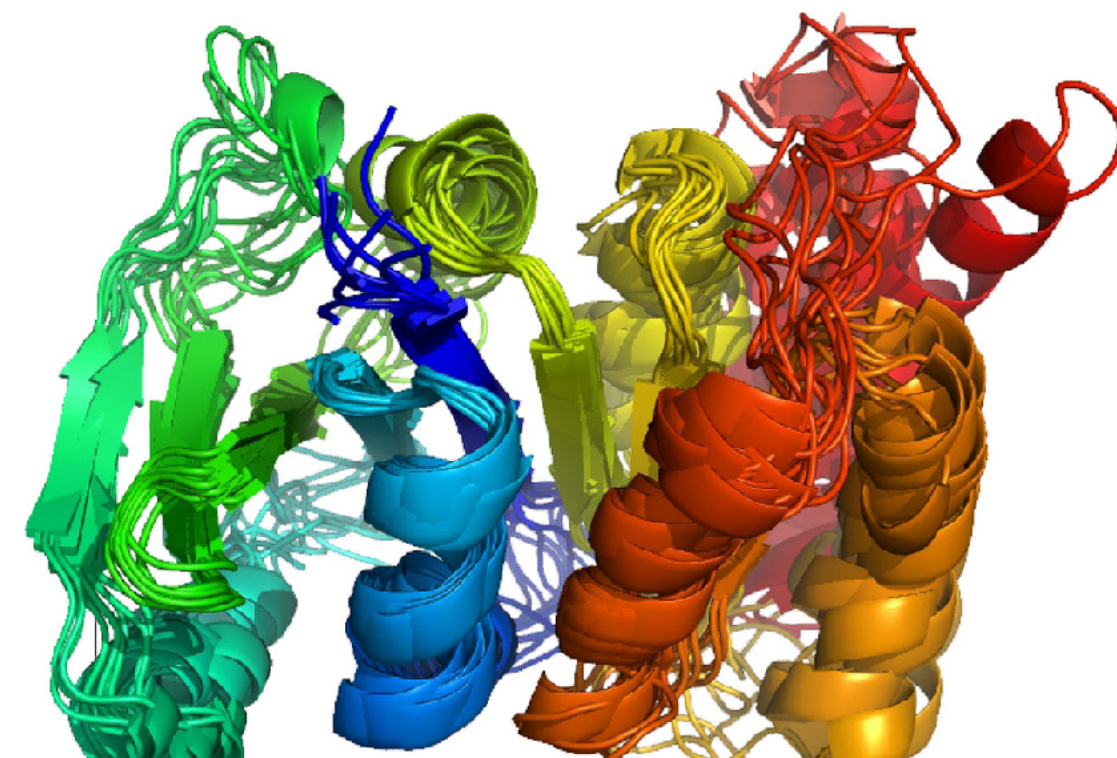
コンピューターは 機械

94.3 53.9 76.5 87.8 92.3 30.9 65.3 65.5 65.3 12.4
65.9 80.1 76.0 80.3 18.7 77.5 93.2 50.5 70.2 20.6
64.9 58.2 14.6 23.7 35.4 57.1 31.2 81.3 14.4 60.5
80.5 11.0 54.2 77.3 74.0 34.5 39.8 98.3 43.6 86.3
89.3 29.9 16.8 97.3 31.5 22.3 36.0 67.5 55.7 41.2
82.1 75.5 73.4 30.6 68.2 17.9 91.4 81.2 98.9 55.5
85.1 47.7 39.5 80.8 65.5 67.3 43.9 19.2 27.6 40.6
39.2 27.2 26.2 44.2 75.7 69.5 12.1 68.2 47.9 46.2
51.8 35.8 94.1 28.8 10.4 57.6 58.7 83.2 41.6 65.4
11.2 32.9 61.4 19.0 87.2 57.5 55.6 46.0 29.0 78.9
33.8 23.4 20.7 38.5 65.9 81.7 29.9 51.0 58.2 17.4
45.9 63.1 86.6 55.4 65.1 41.3 58.7 79.5 94.4 53.5
43.1 43.5 57.9 19.5 89.4 66.3 60.5 72.8 86.2 21.7
80.2 46.4 94.4 51.1 68.3 27.6 51.4 20.7 50.8 95.5
51.7 66.4 59.7 24.2 47.1 99.9 47.2 45.5 40.7 54.0
90.5 92.8 45.3 70.8 12.3 54.1 97.4 43.3 23.2 74.4
37.5 20.7 75.0 39.3 61.9 31.0 55.0 22.9 61.5 37.4
27.3 42.0 83.8 67.9 18.7 33.6 85.0 32.9 25.0 33.7
59.1 89.9 37.2 17.2 43.4 12.9 19.6 45.4 17.6 92.0
89.2 97.5 72.6 63.2 38.5 63.8 61.5 32.0 62.2 38.4
78.2 62.5 42.2 89.4 92.1 31.7 87.6 22.9 95.7 62.9
11.0 21.9 60.3 79.3 34.3 28.7 69.3 74.8 44.1 60.8
19.0 94.8 24.6 27.5 40.7 35.6 24.0 35.1 71.2 65.3
45.6 25.4 41.0 91.3 59.7 46.2 71.2 22.8 84.6 62.5
45.8 64.4 82.5 93.5 71.8 41.7 48.5 30.0 52.6 47.7
77.3 32.6 77.7 74.8 20.6 66.6 21.4 45.9 47.6 80.8
18.5 60.1 54.3 44.0 66.0 41.8 37.6 88.3 92.5 41.7
93.4 50.8 25.9 34.0 44.4 30.0 80.1 57.9 67.0 80.6
47.6 16.4 75.3 94.8 98.4 61.7 77.3 61.5 77.2 47.2
30.8 93.9 80.9 80.7 60.7 71.8 63.1 17.9 59.2 12.8
89.1 21.2 67.5 85.0 73.6 16.6 23.2 99.7 44.2 16.6
63.6 63.4 62.1 53.2 27.6 68.3 91.7 96.7 19.2 74.6
67.3 33.3 67.4 16.5 63.7 19.0 73.3 33.7 56.1 30.9
81.0 88.6 78.3 76.1 88.5 30.3 80.1 87.3 58.1 85.0
89.5 29.0 90.4 43.4 70.8 24.0 23.6 26.0 94.6 62.4
98.5 86.0 19.3 42.6 69.1 93.0 60.8 67.8 40.1 96.7
82.1 35.6 59.7 44.3 59.3 59.5 66.9 40.4 97.6 73.4
82.4 97.6 27.0 27.2 93.7 16.3 81.1 89.9 92.2 95.7
56.3 11.9 73.0 40.1 22.5 14.0 94.7 56.2 13.7 40.7
36.0 17.6 73.8 54.4 54.7 12.2 79.3 90.6 96.8 96.6
10.6 50.5 72.2 80.6 42.3 31.1 34.2 79.8 24.0 60.7
38.3 85.5 95.9 52.7 40.7 12.0 49.4 81.0 58.9 81.1
12.4 11.4 59.2 14.9 40.8 75.8 80.4 58.8 64.6 31.3
72.9 48.0 57.4 40.6 45.1 20.9 81.1 47.9 91.0 84.3
55.8 74.9 42.0 53.9 97.7 10.1 18.5 89.1 18.3 88.8
33.4 41.6 35.5 70.4 23.0 63.6 53.6 42.7 23.9 54.2
89.5 22.5 51.5 20.1 86.4 34.2 46.3 16.4 44.1 10.7
92.2 66.6 57.1 40.9 85.7 73.5 36.0 84.8 18.5 12.2
54.0 87.6 17.9 85.2 71.8 51.3 76.0 85.1 77.0 62.5
32.0 14.5 50.6 59.7 53.4 65.0 21.9 22.7 75.8 64.8
27.3 69.4 16.5 72.4 80.9 44.9 53.3 40.9 88.8 31.5
38.0 61.6 90.1 50.9 35.0 51.7 41.2 83.4 37.4 88.4
56.4 78.8 64.0 65.0 49.4 89.1 72.5 89.8 54.3 86.2
91.5 67.4 23.1 21.6 82.2 42.8 88.4 60.1 97.0 27.7
41.6 49.5 97.3 83.2 29.2 29.3 53.4 28.2 96.4 35.6
61.0 37.3 32.3 35.0 94.2 66.9 89.3 42.0 64.0 17.0
61.0 41.9 43.7 92.9 26.6 84.5 19.3 78.8 94.4 82.2
57.1 49.2 98.2 15.5 10.9 29.7 54.4 68.3 54.6 18.4
95.2 54.9 54.7 29.4 59.2 37.5 19.9 33.2 31.5 29.8
49.0 41.3 11.0 46.6 75.9 47.8 52.3 87.8 86.2 50.3

情報



情報

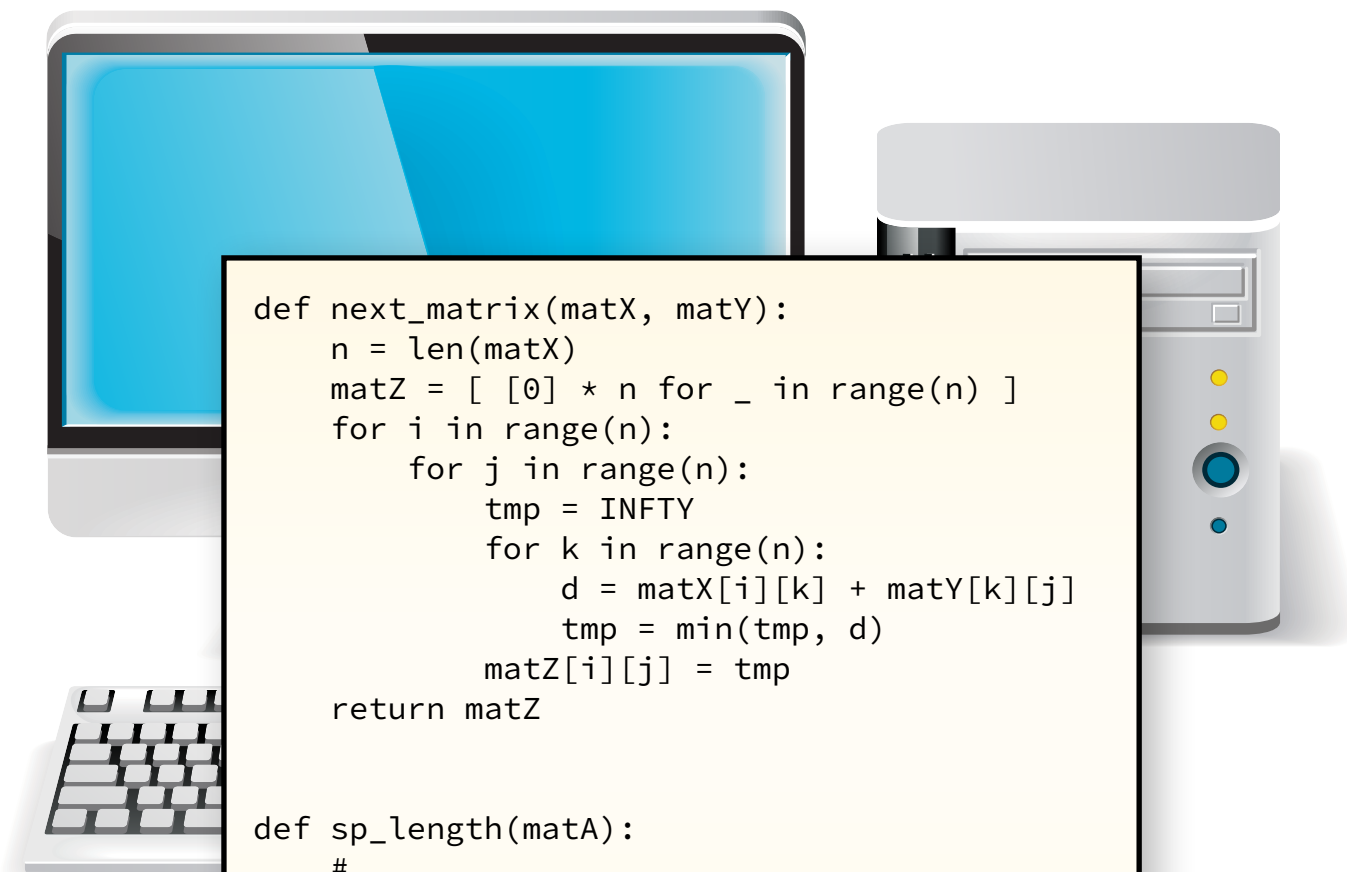


コンピューターって何？

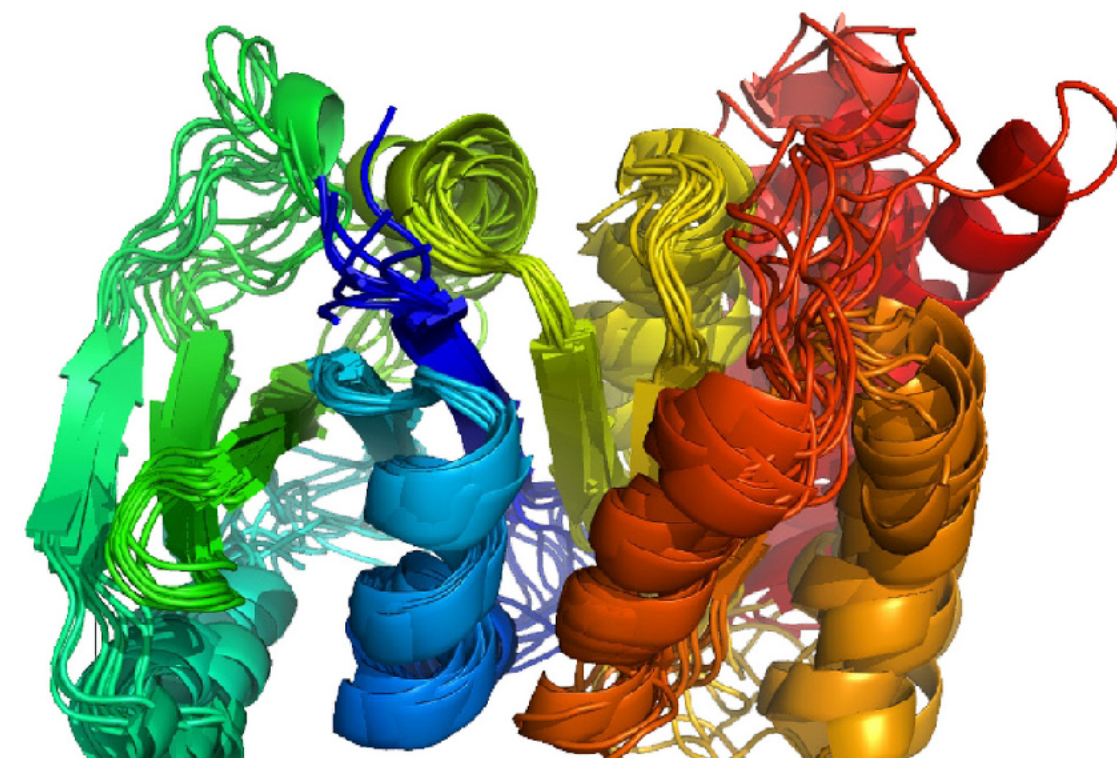
コンピューターは 機械

94.3 53.9 76.5 87.8 92.3 30.9 65.3 65.5 65.3 12.4
65.9 80.1 76.0 80.3 18.7 77.5 93.2 50.5 70.2 20.6
64.9 58.2 14.6 23.7 35.4 57.1 31.2 81.3 14.4 60.5
80.5 11.0 54.2 77.3 74.0 34.5 39.8 98.3 43.6 86.3
89.3 29.9 16.8 97.3 31.5 22.3 36.0 67.5 55.7 41.2
82.1 75.5 73.4 30.6 68.2 17.9 91.4 81.2 98.9 55.5
85.1 47.7 39.5 80.8 65.5 67.3 43.9 19.2 27.6 40.6
39.2 27.2 26.2 44.2 75.7 69.5 12.1 68.2 47.9 46.2
51.8 35.8 94.1 28.8 10.4 57.6 58.7 83.2 41.6 65.4
11.2 32.9 61.4 19.0 87.2 57.5 55.6 46.0 29.0 78.9
33.8 23.4 20.7 38.5 65.9 81.7 29.9 51.0 58.2 17.4
45.9 63.1 86.6 55.4 65.1 41.3 58.7 79.5 94.4 53.5
43.1 43.5 57.9 19.5 89.4 66.3 60.5 72.8 86.2 21.7
80.2 46.4 94.4 51.1 68.3 27.6 51.4 20.7 50.8 95.5
51.7 66.4 59.7 24.2 47.1 99.9 47.2 45.5 40.7 54.0
90.5 92.8 45.3 70.8 12.3 54.1 97.4 43.3 23.2 74.4
37.5 20.7 75.0 39.3 61.9 31.0 55.0 22.9 61.5 37.4
27.3 42.0 83.8 67.9 18.7 33.6 85.0 32.9 25.0 33.7
59.1 89.9 37.2 17.2 43.4 12.9 19.6 45.4 17.6 92.0
89.2 97.5 72.6 63.2 38.5 63.8 61.5 32.0 62.2 38.4
78.2 62.5 42.2 89.4 92.1 31.7 87.6 22.9 95.7 62.9
11.0 21.9 60.3 79.3 34.3 28.7 69.3 74.8 44.1 60.8
19.0 94.8 24.6 27.5 40.7 35.6 24.0 35.1 71.2 65.3
45.6 25.4 41.0 91.3 59.7 46.2 71.2 22.8 84.6 62.5
45.8 64.4 82.5 93.5 71.8 41.7 48.5 30.0 52.6 47.7
77.3 32.6 77.7 74.8 20.6 66.6 21.4 45.9 47.6 80.8
18.5 60.1 54.3 44.0 66.0 41.8 37.6 88.3 92.5 41.7
93.4 50.8 25.9 34.0 44.4 30.0 80.1 57.9 67.0 80.6
47.6 16.4 75.3 94.8 98.4 61.7 77.3 61.5 77.2 47.2
30.8 93.9 80.9 80.7 60.7 71.8 63.1 17.9 59.2 12.8
89.1 21.2 67.5 85.0 73.6 16.6 23.2 99.7 44.2 16.6
63.6 63.4 62.1 53.2 27.6 68.3 91.7 96.7 19.2 74.6
67.3 33.3 67.4 16.5 63.7 19.0 73.3 33.7 56.1 30.9
81.0 88.6 78.3 76.1 88.5 30.3 80.1 87.3 58.1 85.0
89.5 29.0 90.4 43.4 70.8 24.0 23.6 26.0 94.6 62.4
98.5 86.0 19.3 42.6 69.1 93.0 60.8 67.8 40.1 96.7
82.1 35.6 59.7 44.3 59.3 59.5 66.9 40.4 97.6 73.4
82.4 97.6 27.0 27.2 93.7 16.3 81.1 89.9 92.2 95.7
56.3 11.9 73.0 40.1 22.5 14.0 94.7 56.2 13.7 40.7
36.0 17.6 73.8 54.4 54.7 12.2 79.3 90.6 96.8 96.6
10.6 50.5 72.2 80.6 42.3 31.1 34.2 79.8 24.0 60.7
38.3 85.5 95.9 52.7 40.7 12.0 49.4 81.0 58.9 81.1
12.4 11.4 59.2 14.9 40.8 75.8 80.4 58.8 64.6 31.3
72.9 48.0 57.4 40.6 45.1 20.9 81.1 47.9 91.0 84.3
55.8 74.9 42.0 53.9 97.7 10.1 18.5 89.1 18.3 88.8
33.4 41.6 35.5 70.4 23.0 63.6 53.6 42.7 23.9 54.2
89.5 22.5 51.5 20.1 86.4 34.2 46.3 16.4 44.1 10.7
92.2 66.6 57.1 40.9 85.7 73.5 36.0 84.8 18.5 12.2
54.0 87.6 17.9 85.2 71.8 51.3 76.0 85.1 77.0 62.5
32.0 14.5 50.6 59.7 53.4 65.0 21.9 22.7 75.8 64.8
27.3 69.4 16.5 72.4 80.9 44.9 53.3 40.9 88.8 31.5
38.0 61.6 90.1 51.9 35.0 51.7 41.2 83.4 37.4 88.4
56.4 78.8 64.0 61.0 49.4 89.1 72.1 69.8 41.3 86.2
91.5 67.4 23.1 71.5 82.2 42.8 88.4 60.1 97.0 27.7
41.6 49.5 97.3 33.1 29.2 29.3 53.1 28.2 65.4 35.6
61.0 37.3 32.7 35.0 94.2 66.9 89.3 42.0 14.0 17.0
61.0 41.9 43.7 92.9 21.6 84.5 11.3 78.8 14.4 82.2
57.1 49.2 68.2 15.5 10.1 29.1 54.4 68.2 14.6 18.4
95.2 54.9 54.7 29.4 59.2 37.5 19.9 33.2 31.5 29.8
49.0 41.3 11.0 46.6 75.9 47.8 52.3 87.8 86.2 50.3

情報



情報



プログラム

出力

```
def next_matrix(matX, matY):  
    n = len(matX)  
    matZ = [ [0] * n for _ in range(n) ]  
    for i in range(n):  
        for j in range(n):  
            tmp = INFY  
            for k in range(n):  
                d = matX[i][k] + matY[k][j]  
                tmp = min(tmp, d)  
            matZ[i][j] = tmp  
    return matZ  
  
def sp_length(mata):  
    #  
    # Minplus algorithm  
    # TODO: improve complexity  
    n = len(mata)  
    matD = [ [ mata[i][j] for j in  
range(n) ] for i in range(n) ]  
    t = 1  
    while t < n-1:
```

コンピューターって何？



コンピューターは
情報を扱う**機械**

データの元素

計算の元素

コンピュータ

有限オートマトン

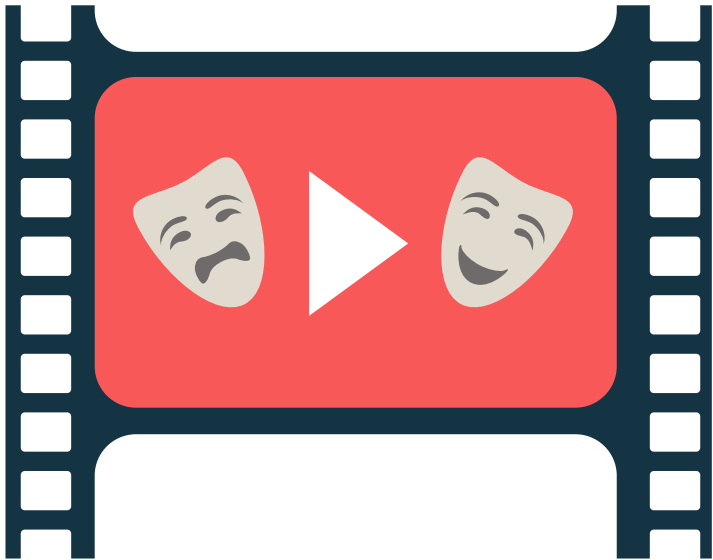
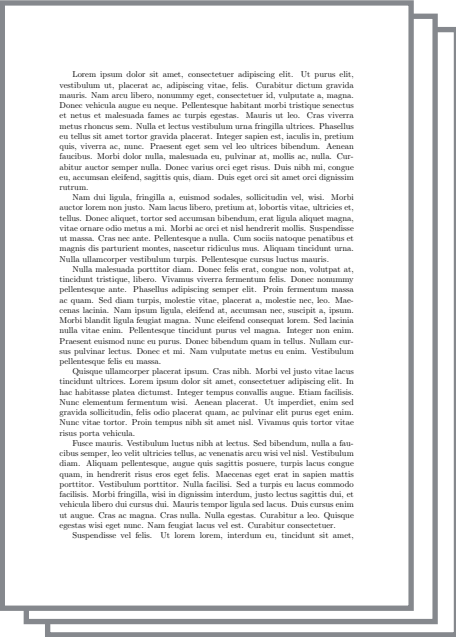
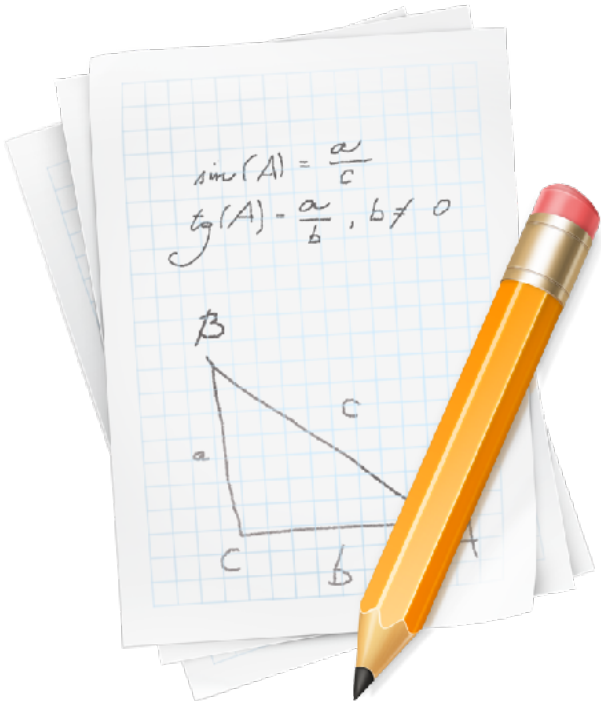
チューリング機械

本日のまとめ

データの元素

データの**元素**は0と1

0110100001100101011011000110110001101111



データは数である

コンピュータの中では

すべてが**二進列**

0と1の列

確かめてみよう

- ▶ 数値
- ▶ 文字
- ▶ 画像
- ▶ 音
- ▶ 映像...

データは数である

コンピュータの中では
すべてが**二進列**

0と1の列

確かめてみよう

数値 **18, -5, 3.25, 1/3** 二進数

- ▶ 文字
- ▶ 画像
- ▶ 音
- ▶ 映像...

十六進数
(hexadecimal)
0123456789ABCDEF

十進数
(decimal)

桁 (digit)				
10^2	10^1	10^0		
1	2	8	$= 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$	= 128
0	0	6	$= 6 \cdot 10^0$	= 6
0	0	7	$= 7 \cdot 10^0$	= 7
1	7	1	$= 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$	= 171

ビット(bit)

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		
1	0	0	0	0	0	0	0	$= 2^7$	= 128
0	0	0	0	0	1	1	0	$= 2^2 + 2^1$	= 6
0	0	0	0	0	1	1	1	$= 2^2 + 2^1 + 2^0$	= 7
1	0	1	0	1	0	1	1	$= 2^7 + 2^5 + 2^3 \dots$	= 171
16^1				16^0					
8				0				$= 8 \cdot 16^1$	= 128
0				6				$= 6 \cdot 16^0$	= 6
0				7				$= 7 \cdot 16^0$	= 7
A				B				$A \cdot 16^1 + B \cdot 16^0$	= 171

データは数である

コンピュータの中では

すべてが**二進列**

0と1の列

確かめてみよう

数 18, -5, 3.25, 1/3

ASCII という符号法

▶ 文字 'a' = 01100001 (=97) 'b' = 01100010 (=98)

▶ 画像

▶ 音

▶ 映像...

データは数である

コンピュータの中では
すべてが**二進列**

0と1の列

確かめてみよう

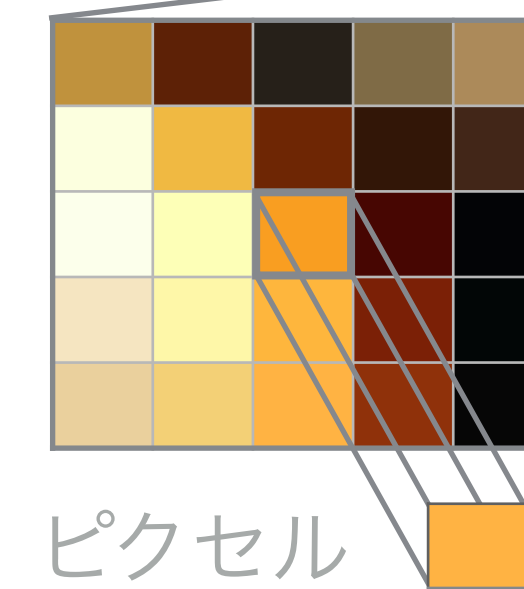
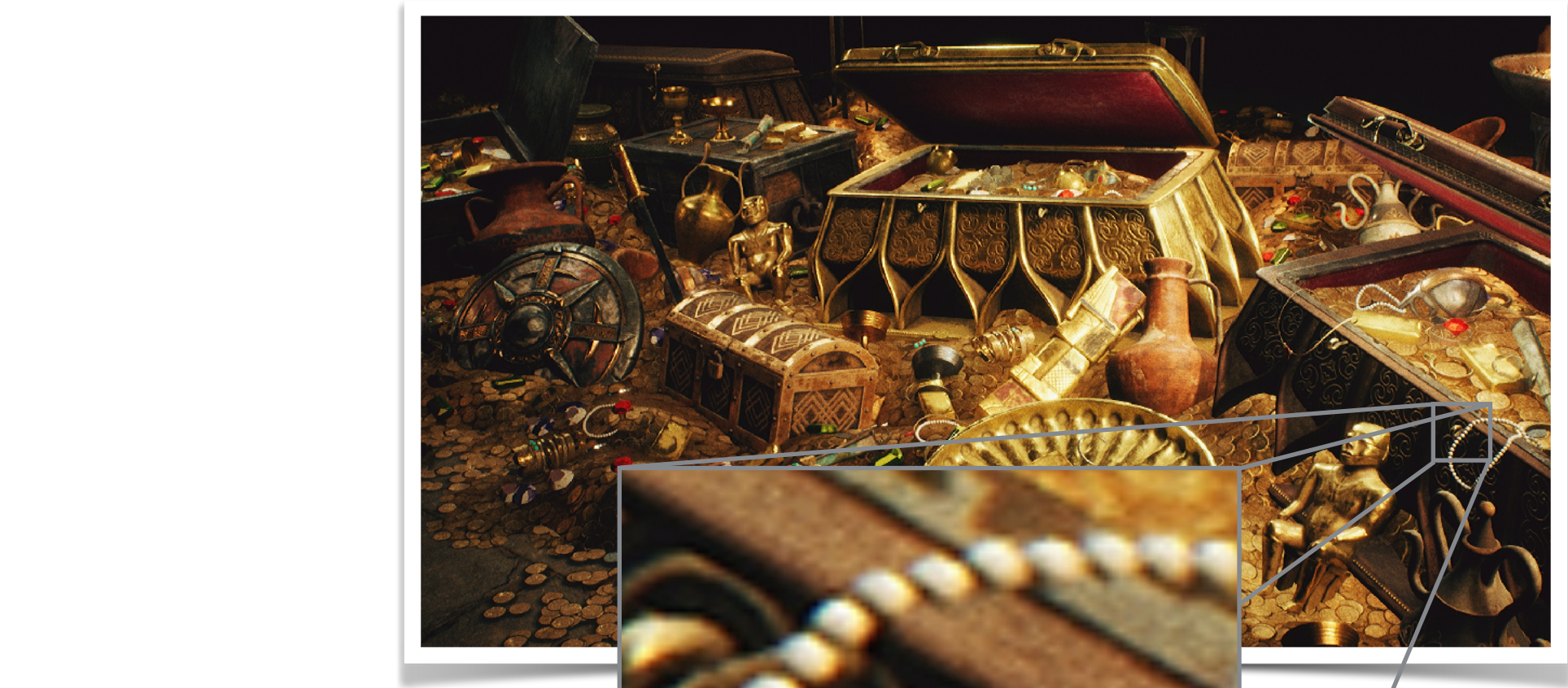
数 18, -5, 3.25, 1/3

文字 'a' = 01100001 (=97)

▶ 画像

▶ 音

▶ 映像...



赤 : FF (100%)

緑 : B3 (70%)

青 : 43 (26%)

16進数 FF B3 43

2進数 11111111 10110011 01000011

10進数 16757571

0と1の列

データは数である

コンピュータの中では
すべてが**二進列**

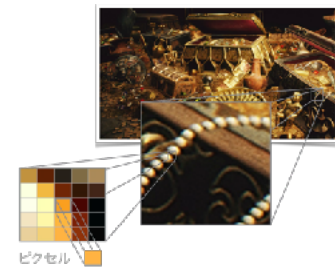
0と1の列

確かめてみよう

数 18, -5, 3.25, 1/3

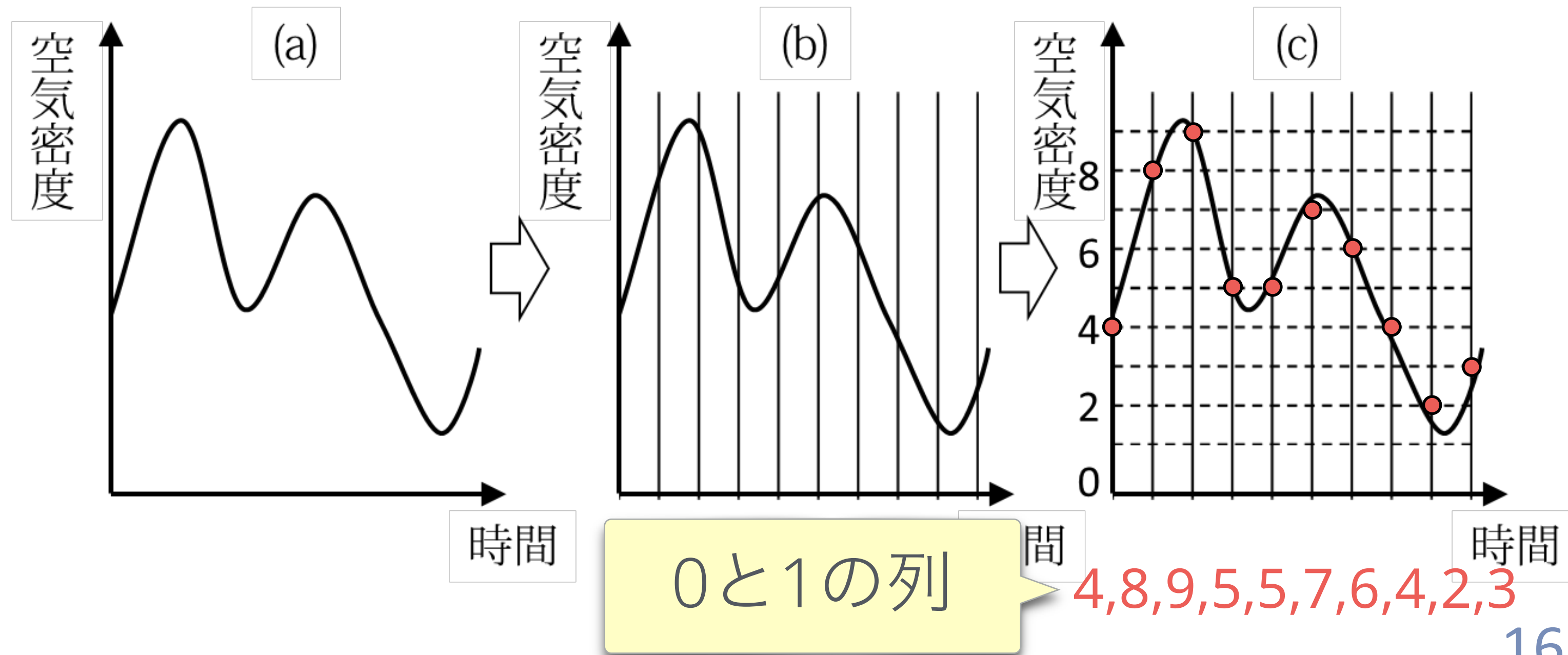
文字 'a' = 01100001 (=97)

画像



▶ 音

▶ 映像...



データは数である

コンピュータの中では

すべてが**二進列**

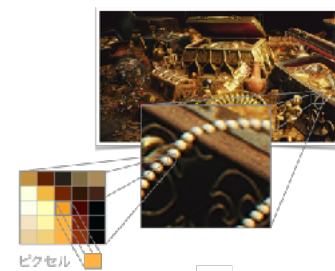
0と1の列

確かめてみよう

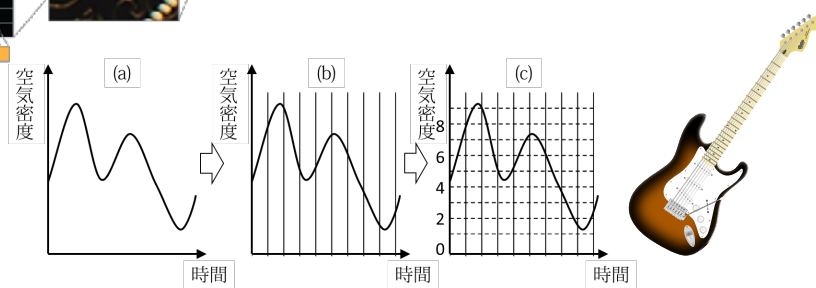
数 18, -5, 3.25, 1/3

文字 'a' = 01100001 (=97)

画像



音



▶ 映像 画像の列

▶ ...味、におい??

データは数である

コンピュータの中では
すべてが**二進列**

0と1の列

確かめてみよう

話を簡単にする為

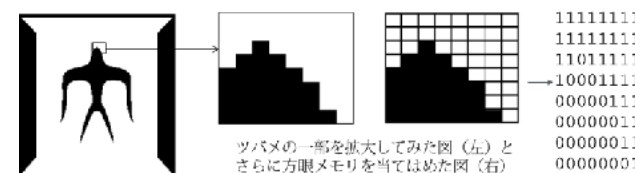
自然数

0, 1, 2, 3, ...

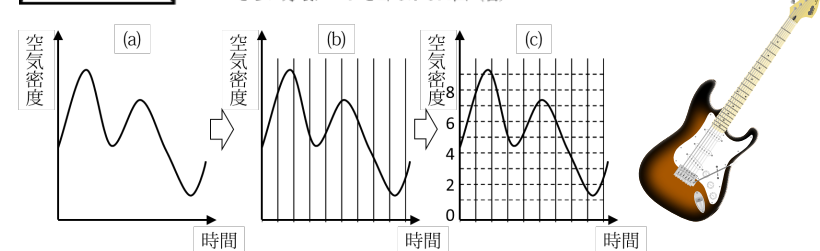
数 18, -5, 3.25, $1/3$

文字 'a' = 01100001 (=97)

画像



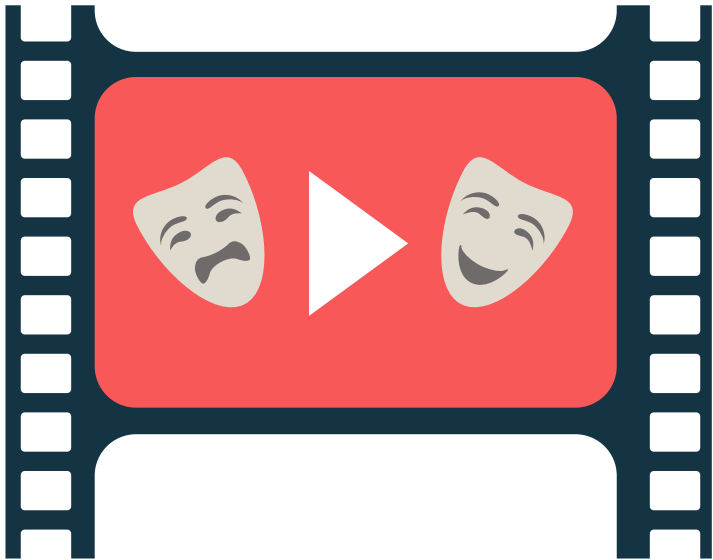
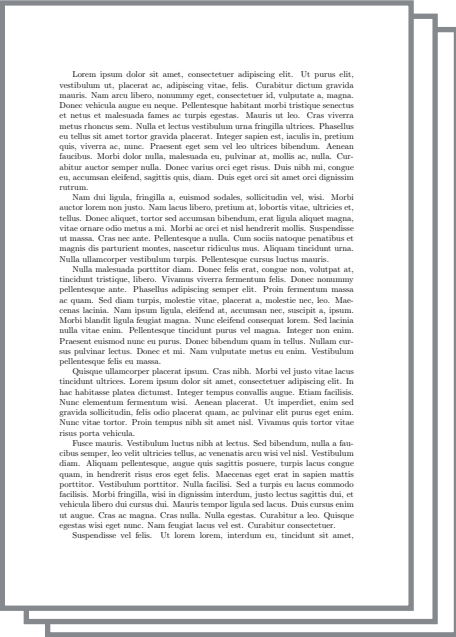
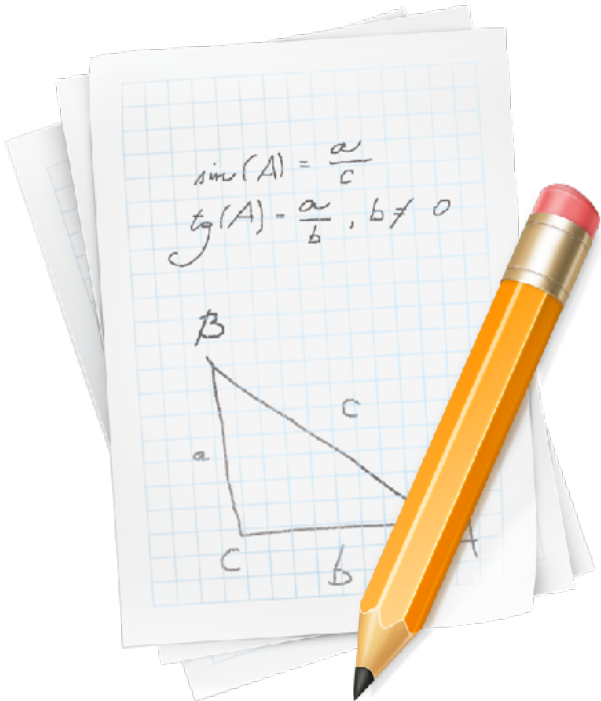
音



映像 画像の列

データの**元素**は0と1

01101000011001010110110001101110001101111

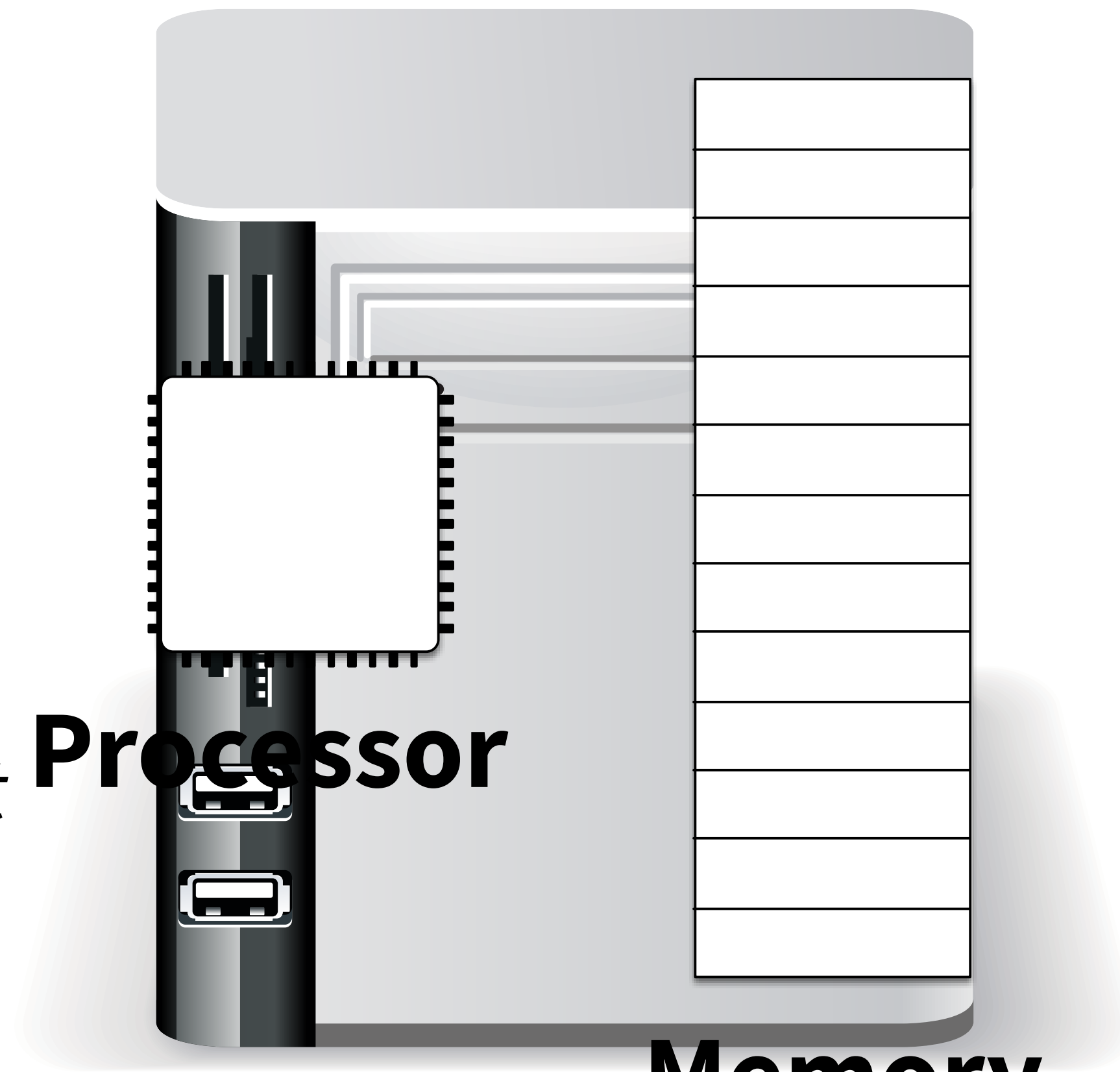


計算の元素

コンピュータ = CPU + メモリ

プロセッサ
演算装置 (CPU)

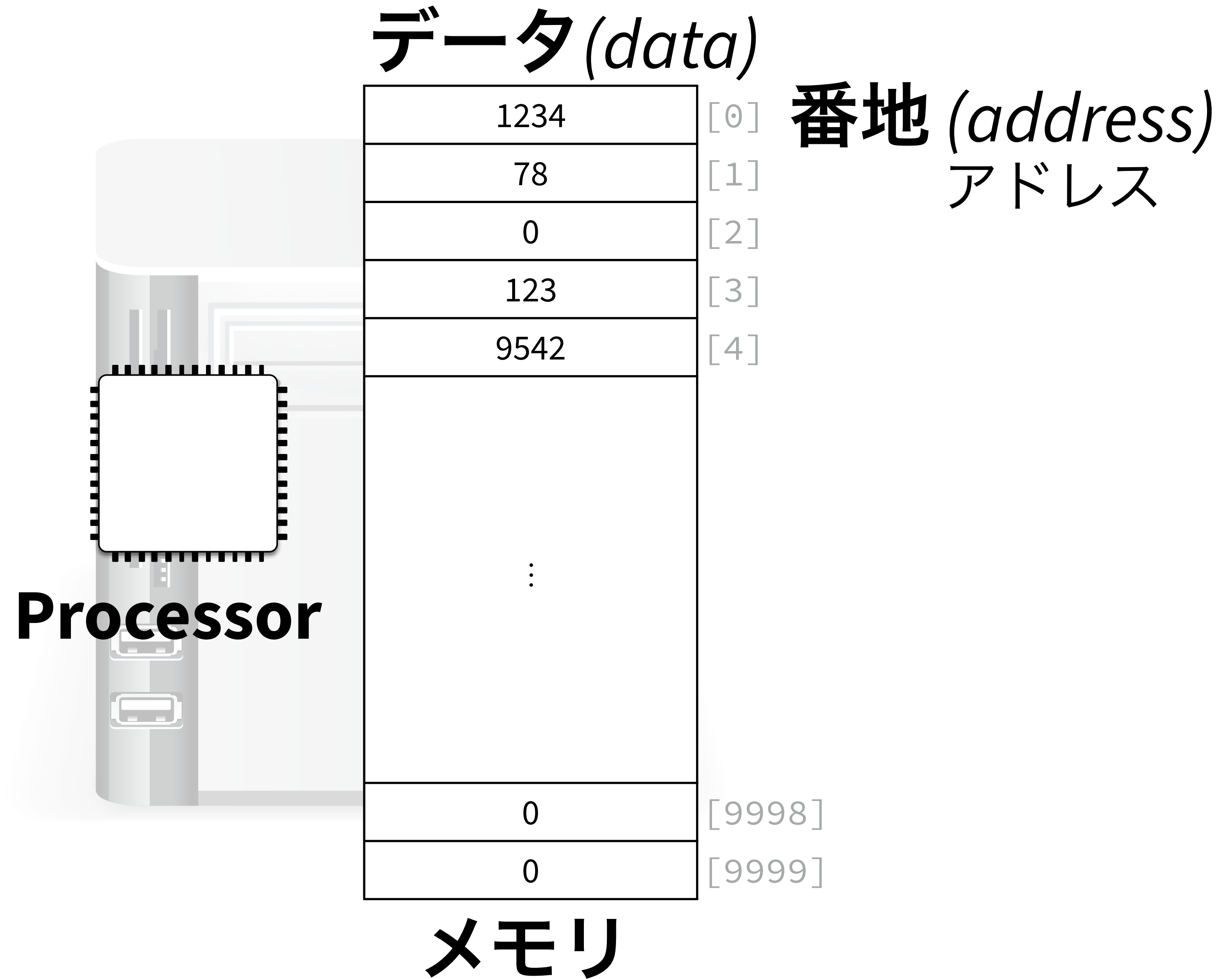
Central Processing Unit **Processor**



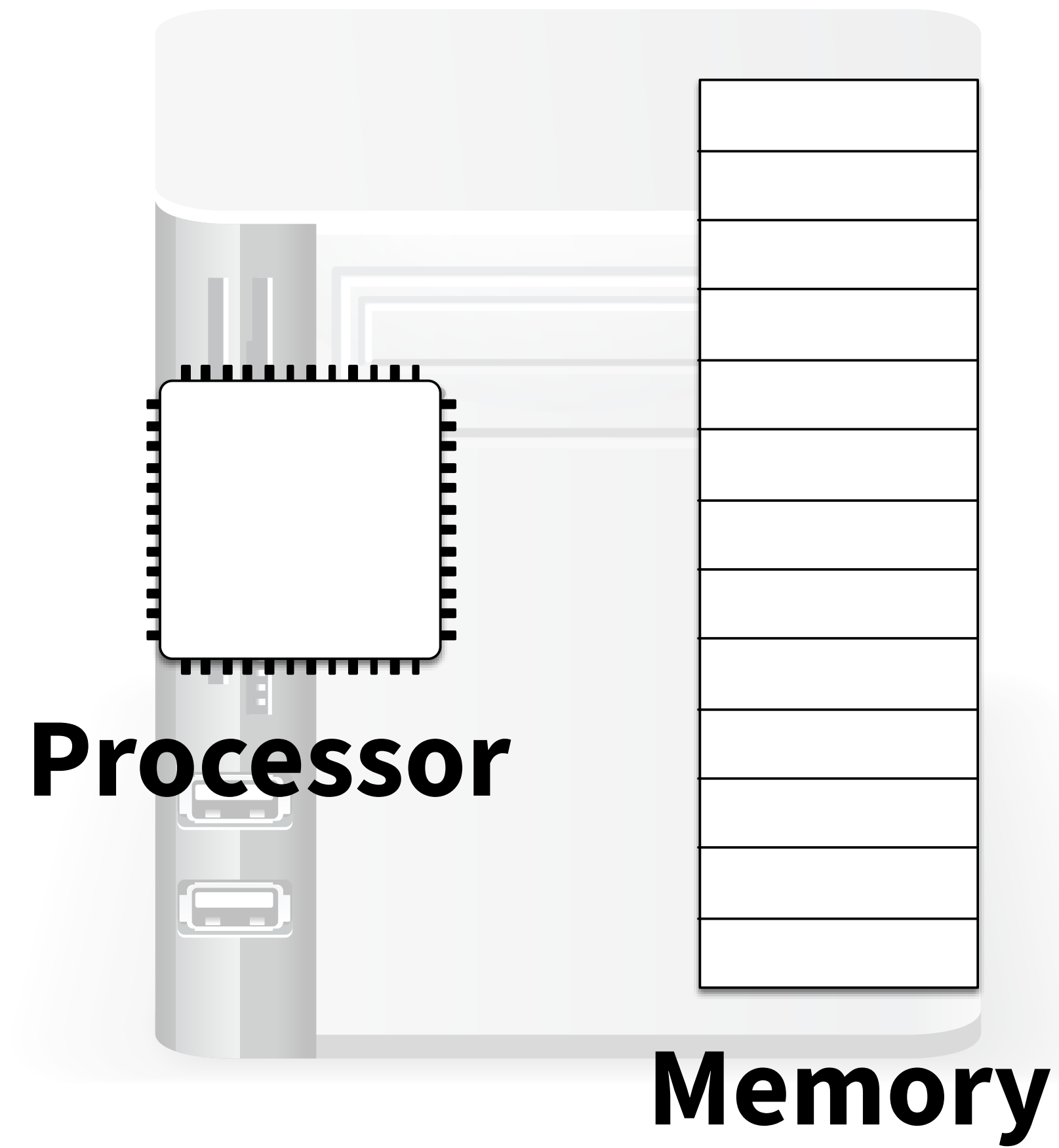
Memory

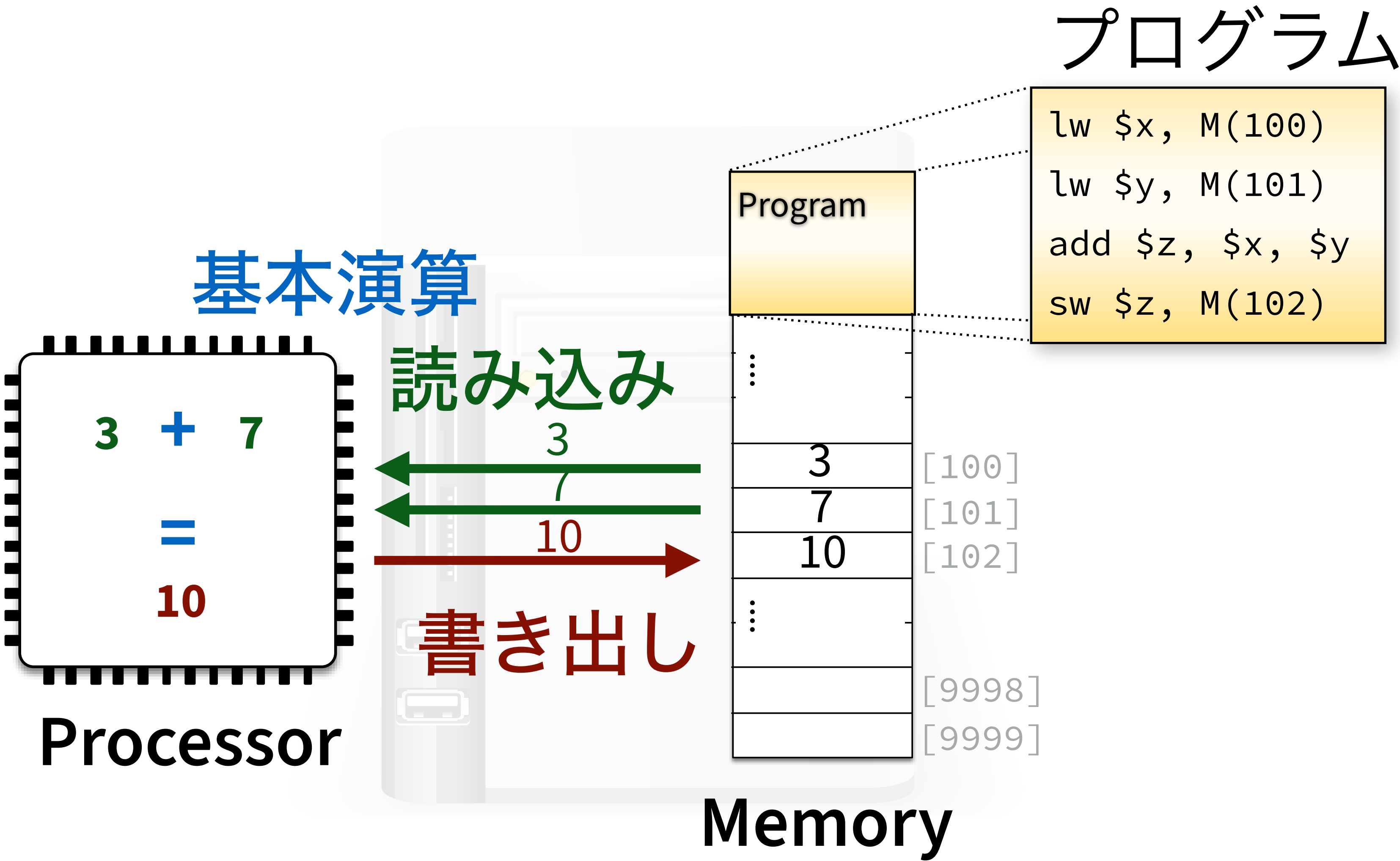
メモリ (記憶領域)

メモリとは？



コンピュータ = CPU + メモリ

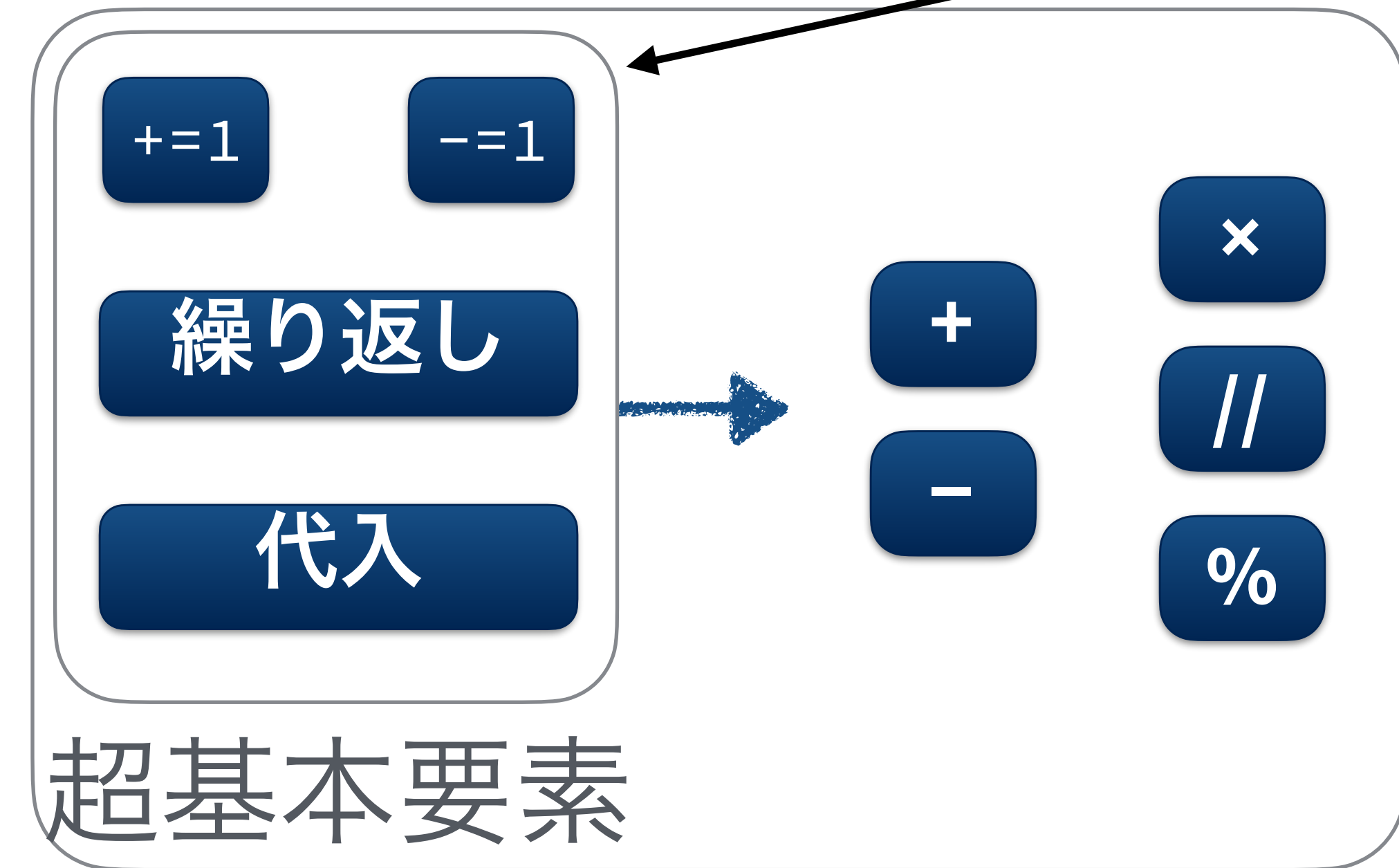




演算装置 = 基本演算を行う装置

計算の原子に
相当する物は何？

Alan Turing



アニメーション

$\sqrt{\quad}$

xy

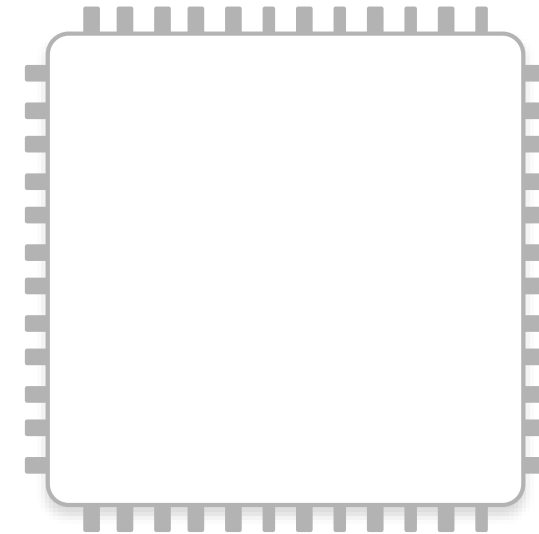
$\sin$

最短経路

囲碁、将棋

AIモデル, ...

タンパク質
の折り畳み

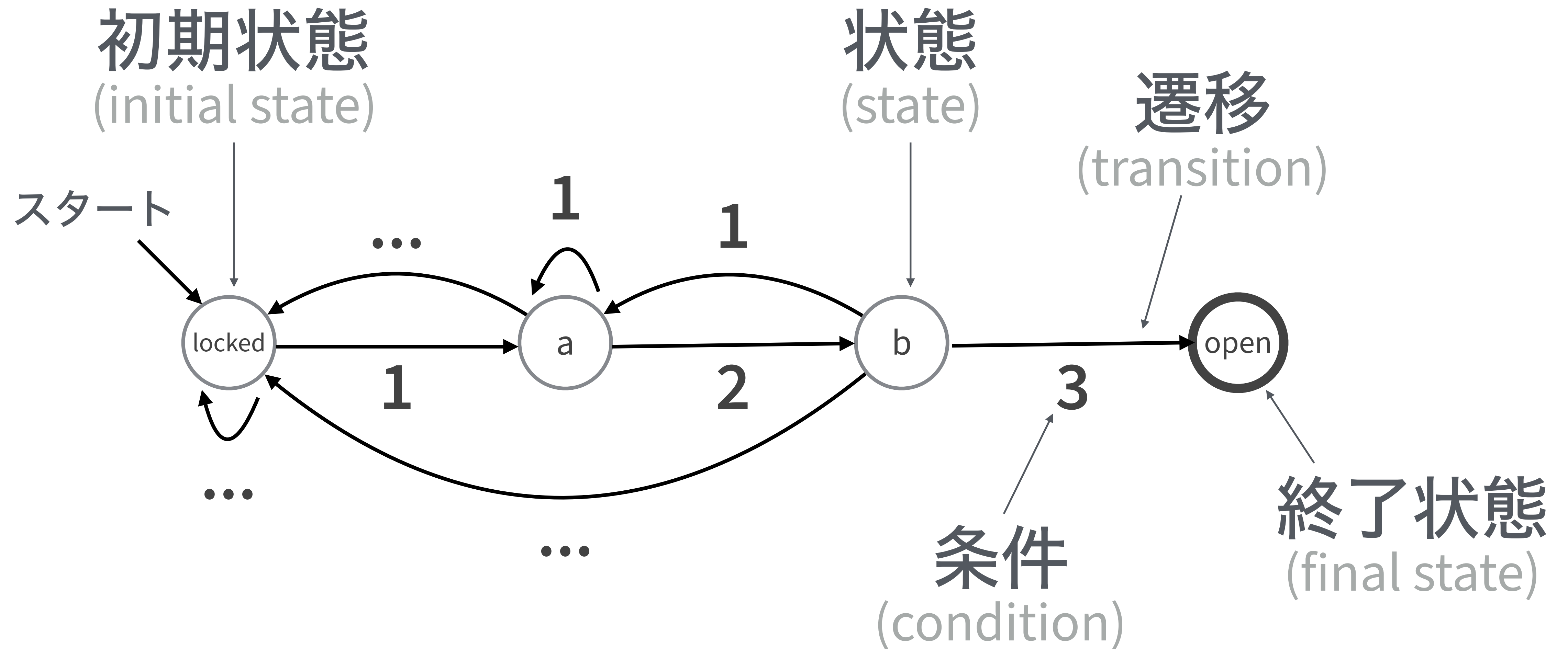


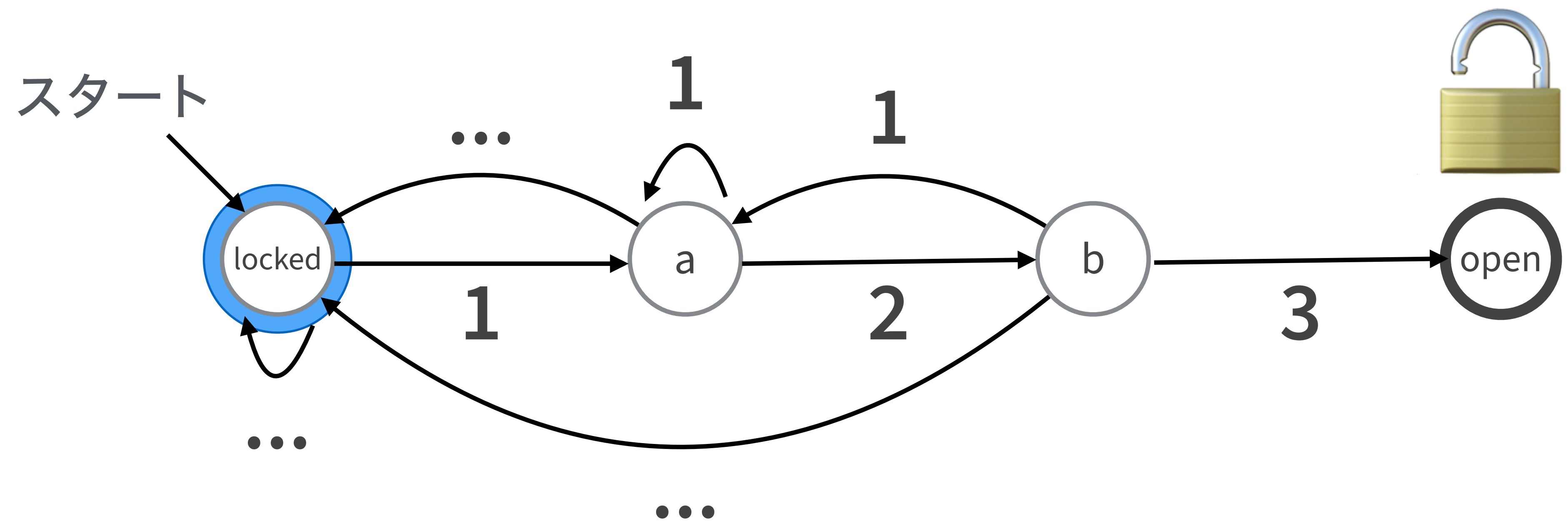
Processor

四則演算

計算の元素

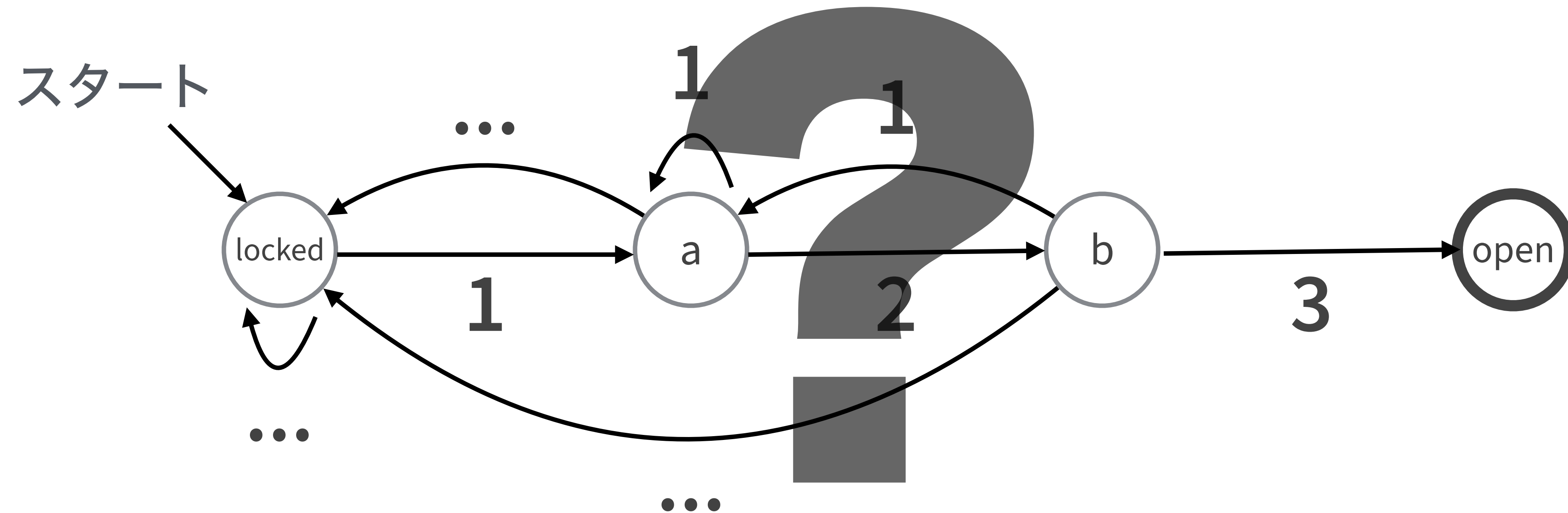
有限オートマトン





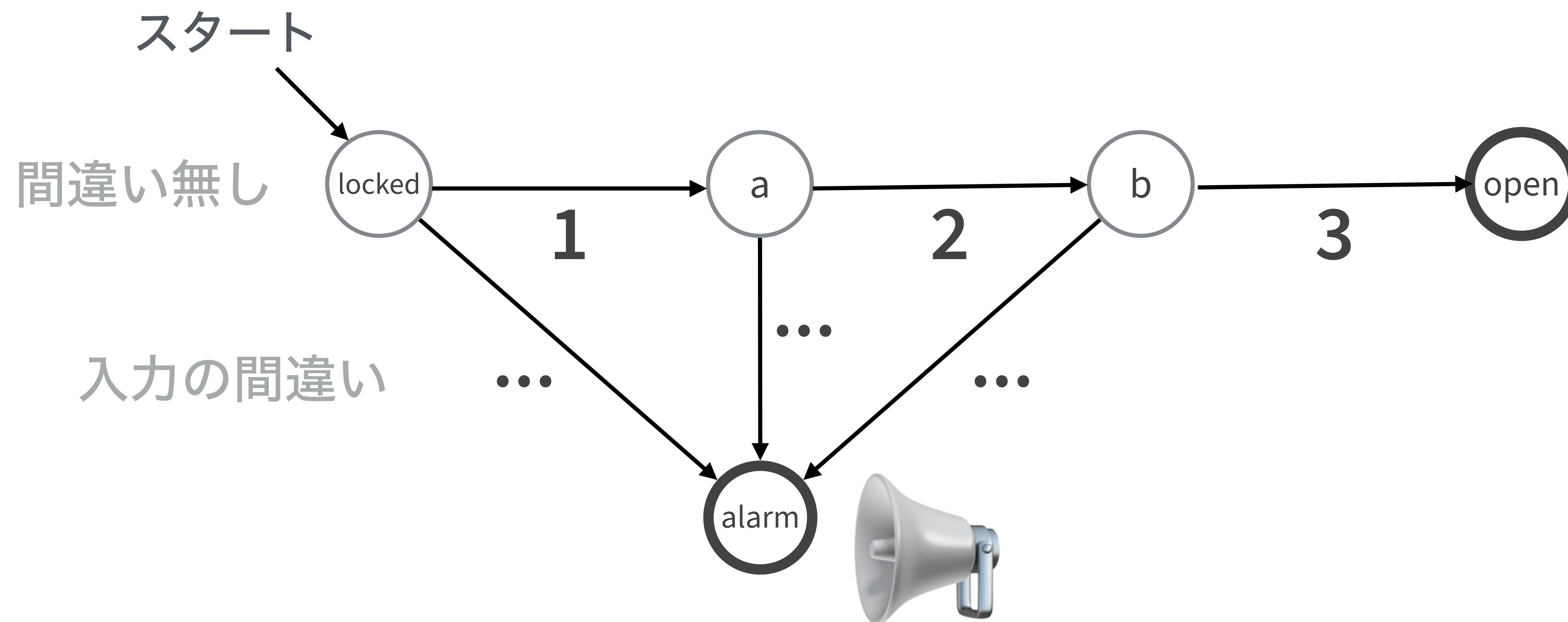
入力
(input)

1 1 2 2 1 2 1 2 3



改善：

入力を間違ったらー> **アラーム**を発生する

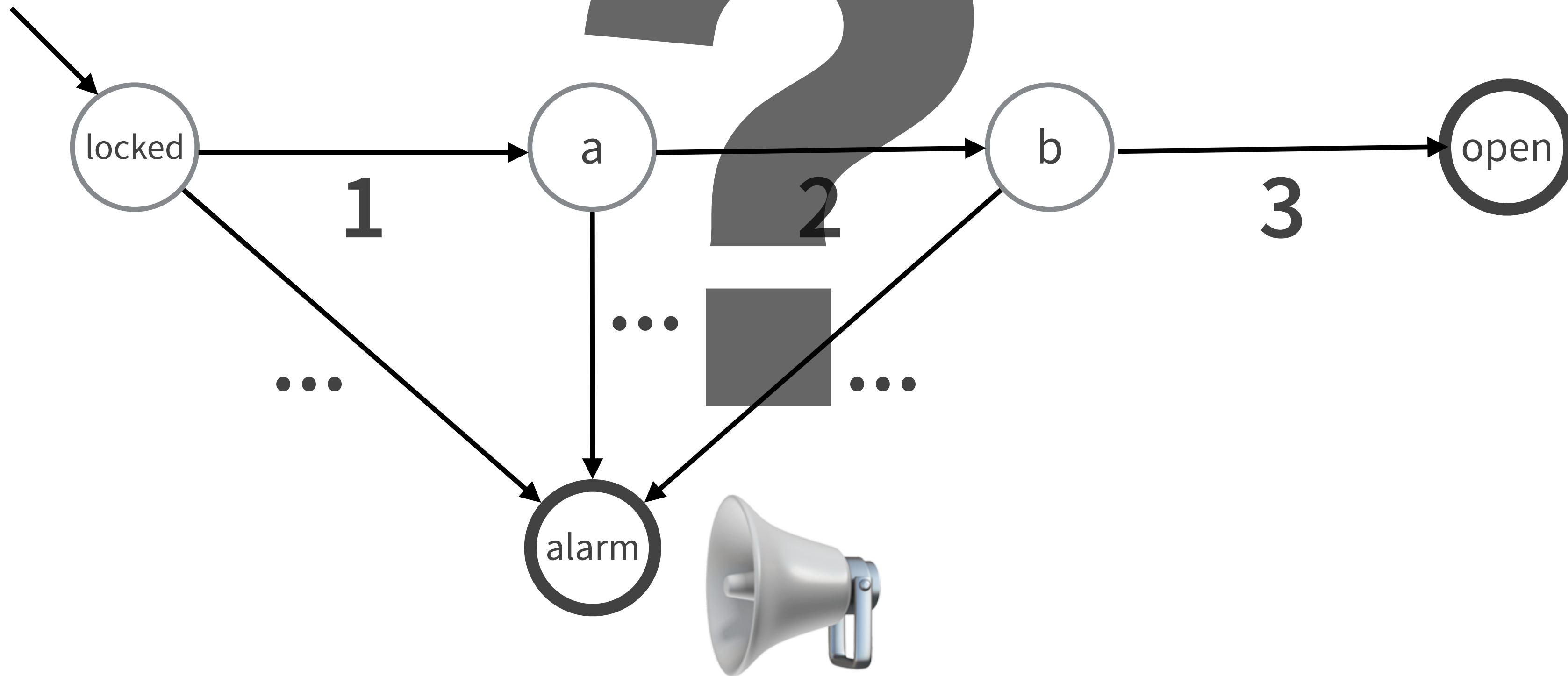




改善:

一回だけ間違っても大丈夫

スタート



有限オートマトン

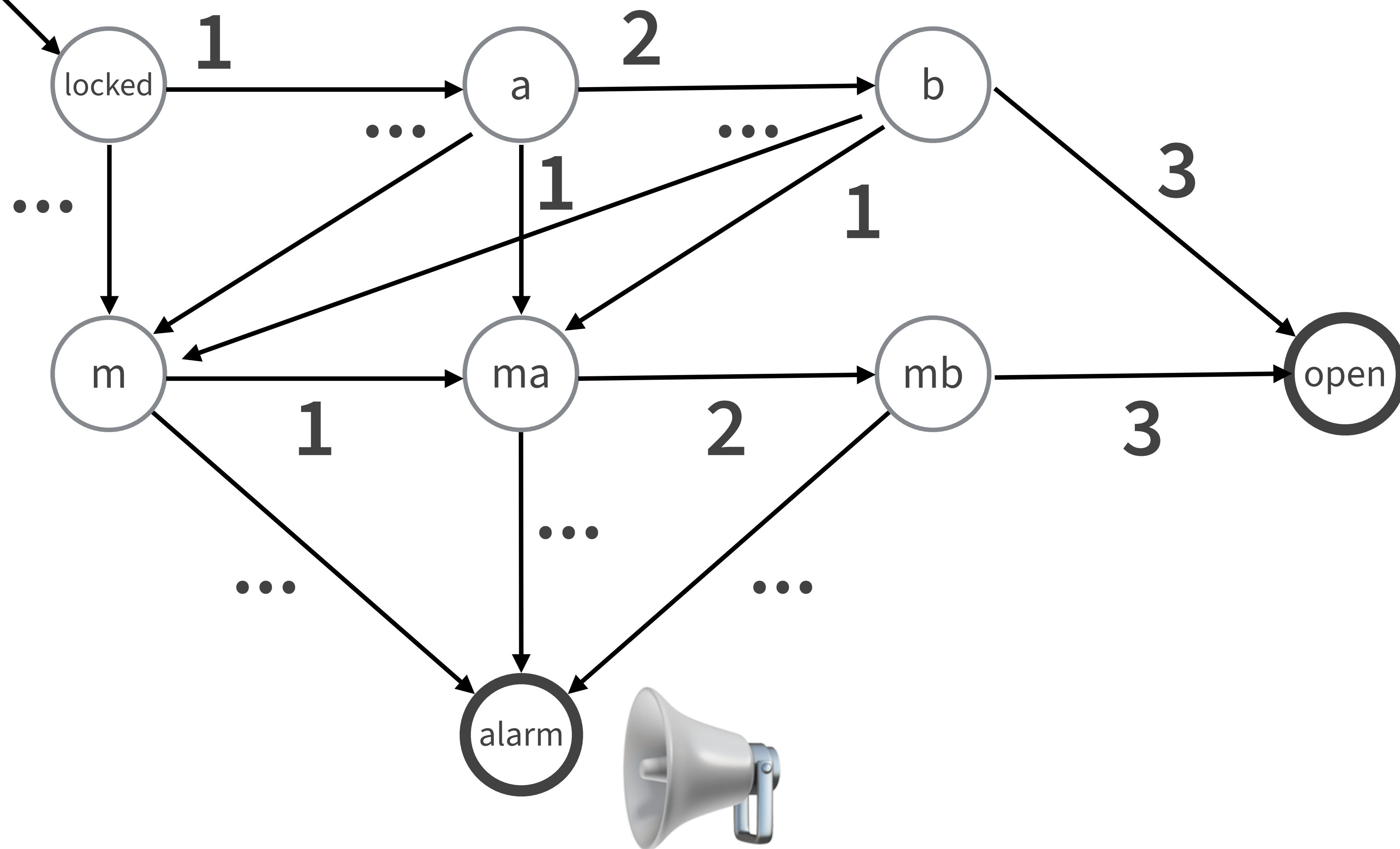


暗証番号: 1-2-3

スタート

間違い無し

1 回間違い



有限オートマトン

定義

オートマトン = $(\Sigma, S, s_0, \delta, F)$

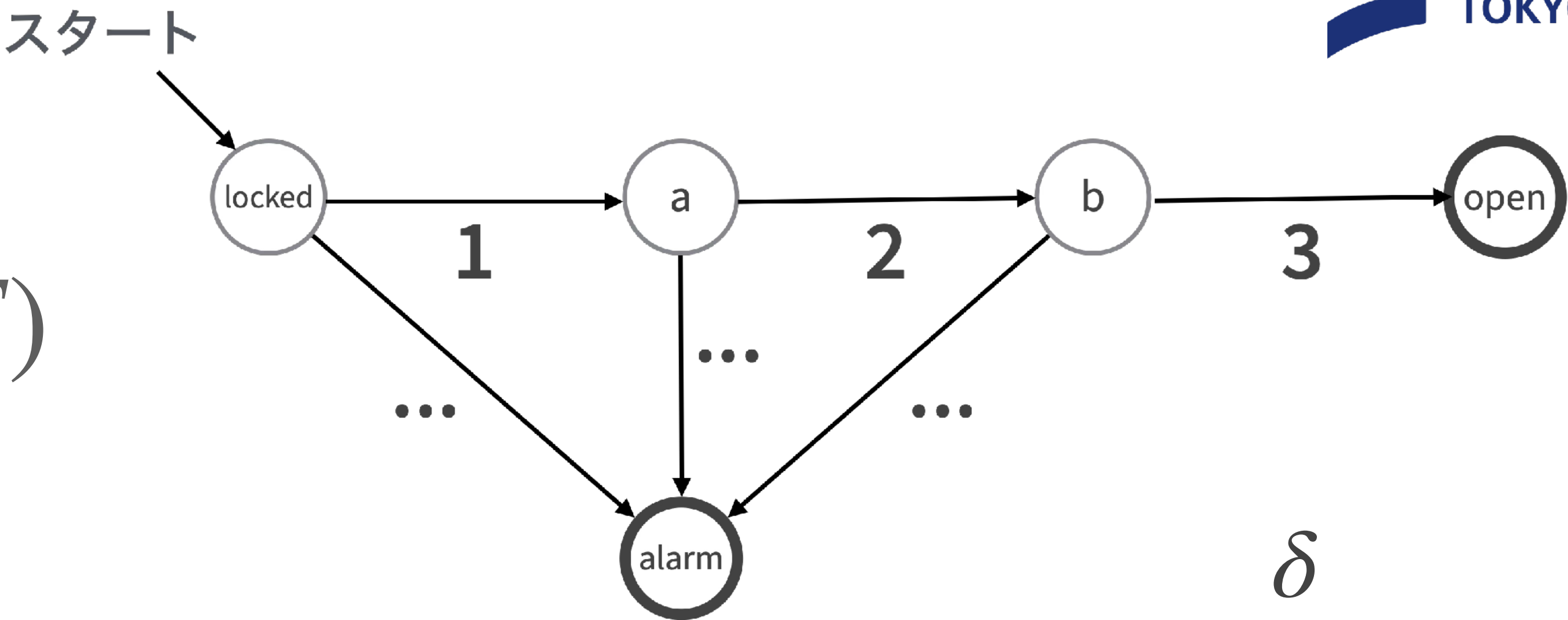
Σ 入力文字セット

S 状態の集合

s_0 初期状態 $(s_0 \in S)$

δ 状態遷移関数 $(\delta : S \times \Sigma \rightarrow S)$

F 終了状態の集合 $(F \subseteq S)$



δ		
S	Σ	->S
locked	1	a
locked	...	alarm
a	2	b
a	...	alarm
b	3	open
b	...	alarm

例) 暗証番号:1-2-3 (alarm)

$(\underbrace{\{1,2,3\}}_{\Sigma}, \underbrace{\{locked, a, b, open, alarm\}}_S, \underbrace{locked}_{s_0}, \underbrace{\delta}_{\delta}, \underbrace{\{open, alarm\}}_F)$

入力文字 状態 初期状態 遷移 終了状態

計算の元素

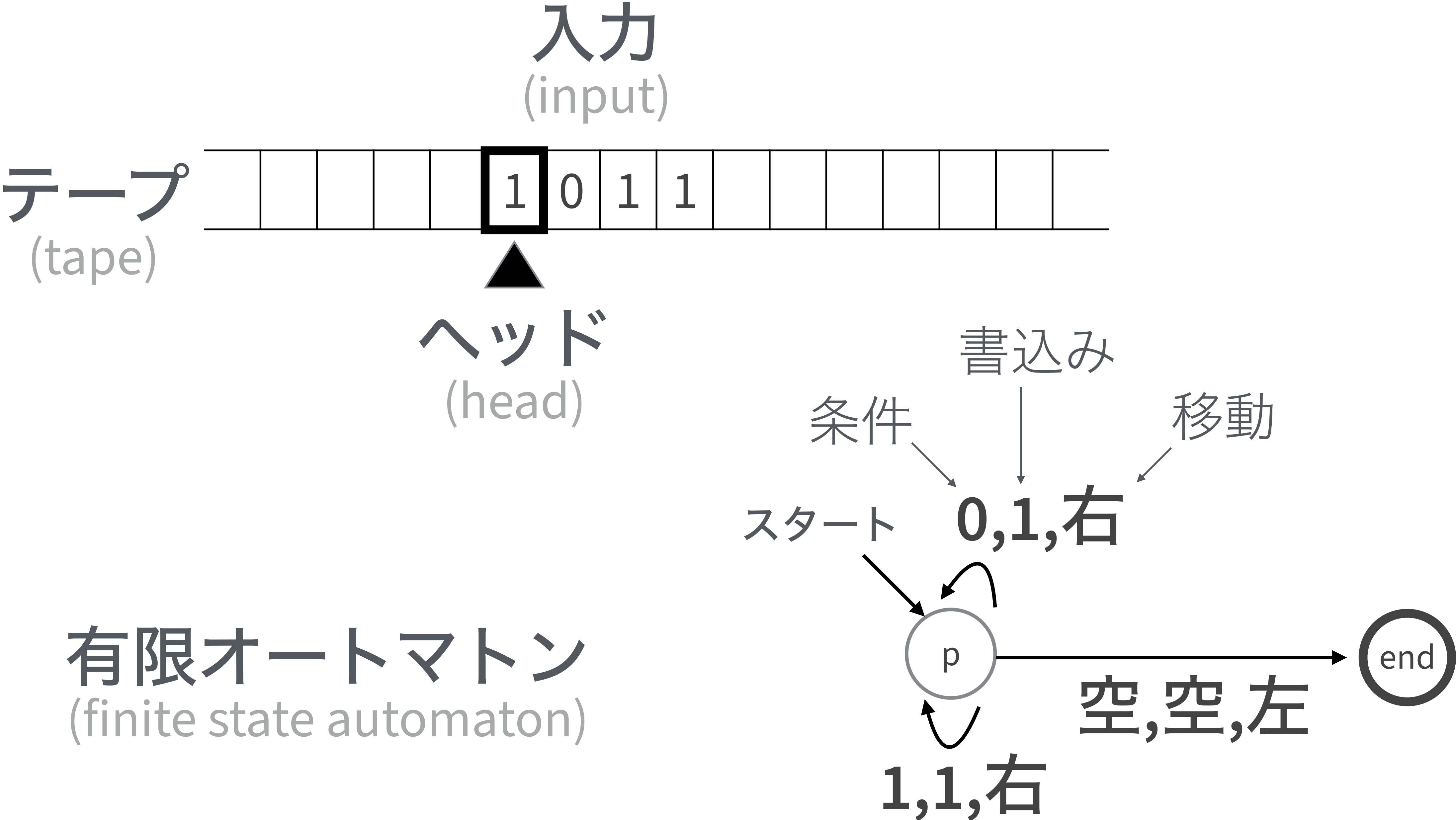
チューリングマシン

チューリングマシン (チューリング機械)

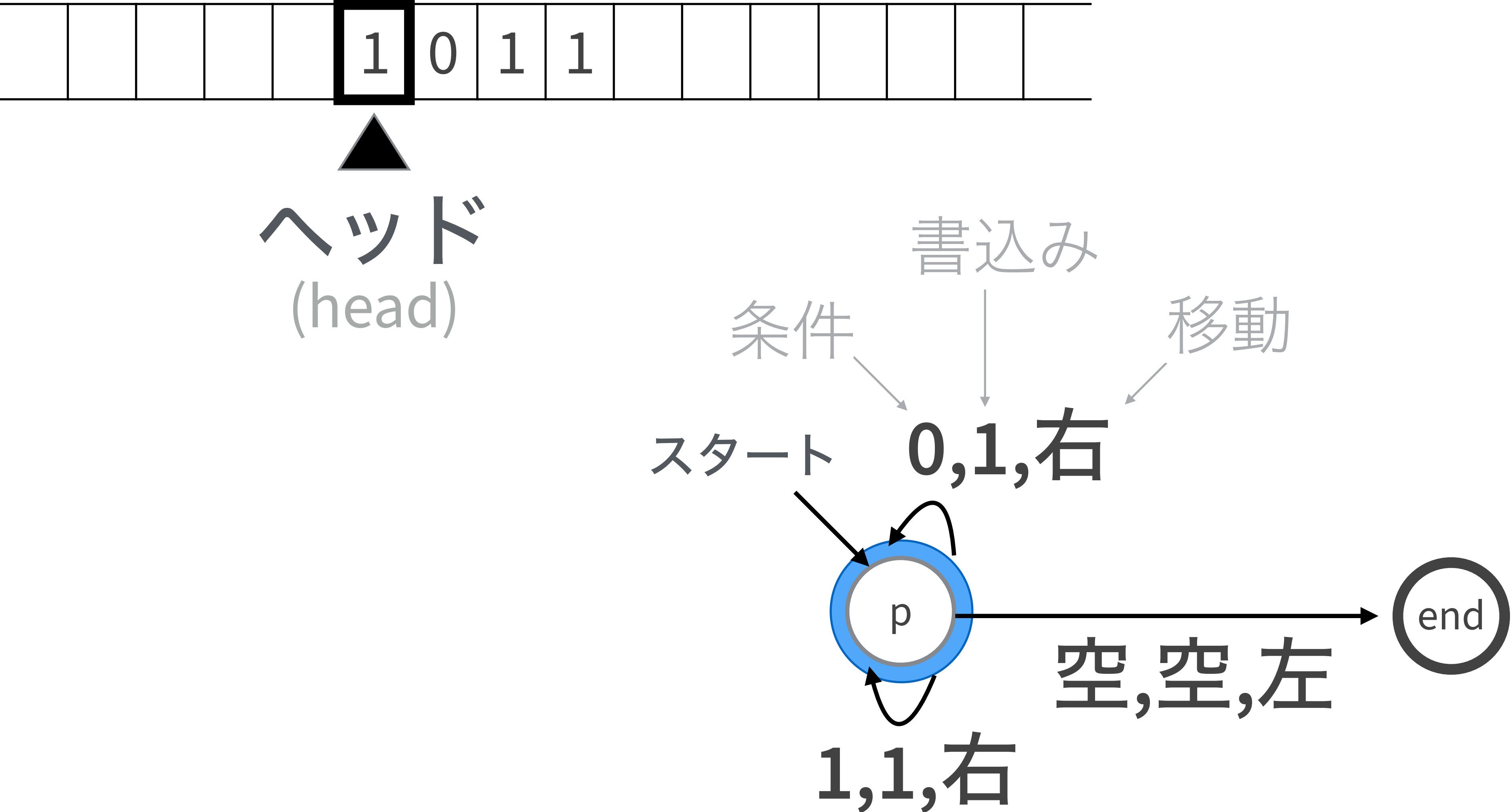
テープ
(tape)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

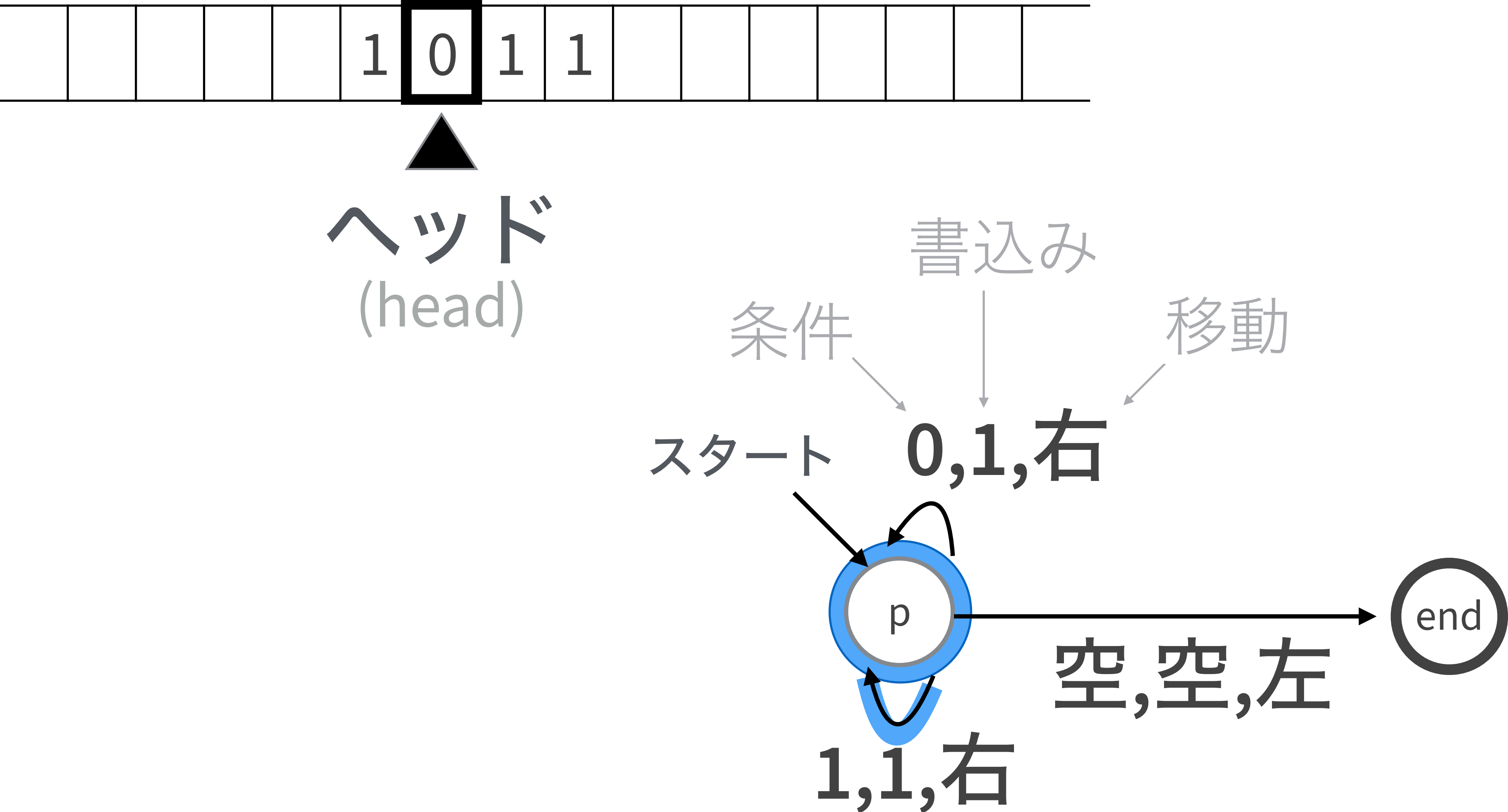
チューリングマシン (チューリング機械)



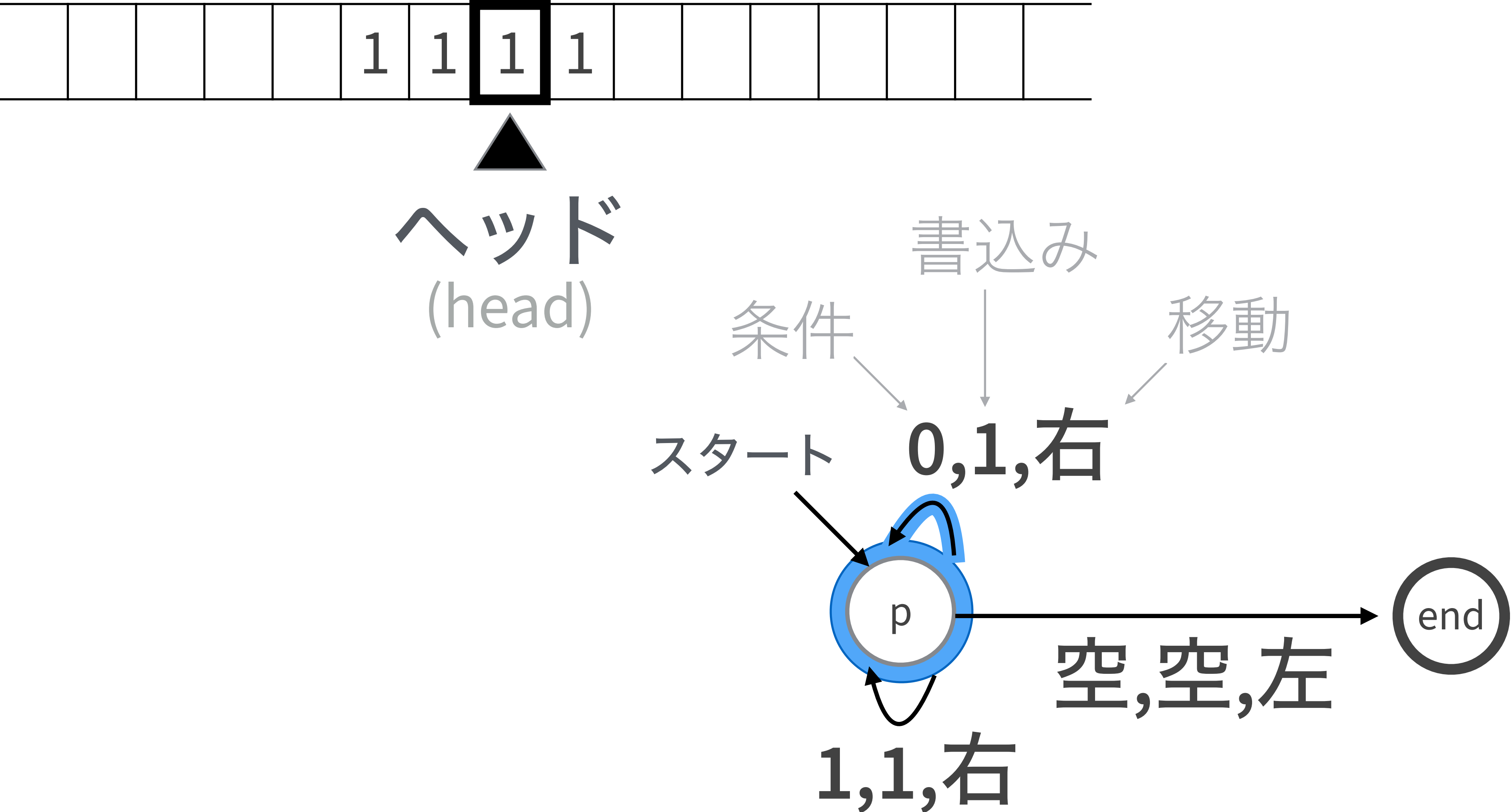
チューリングマシン (チューリング機械)



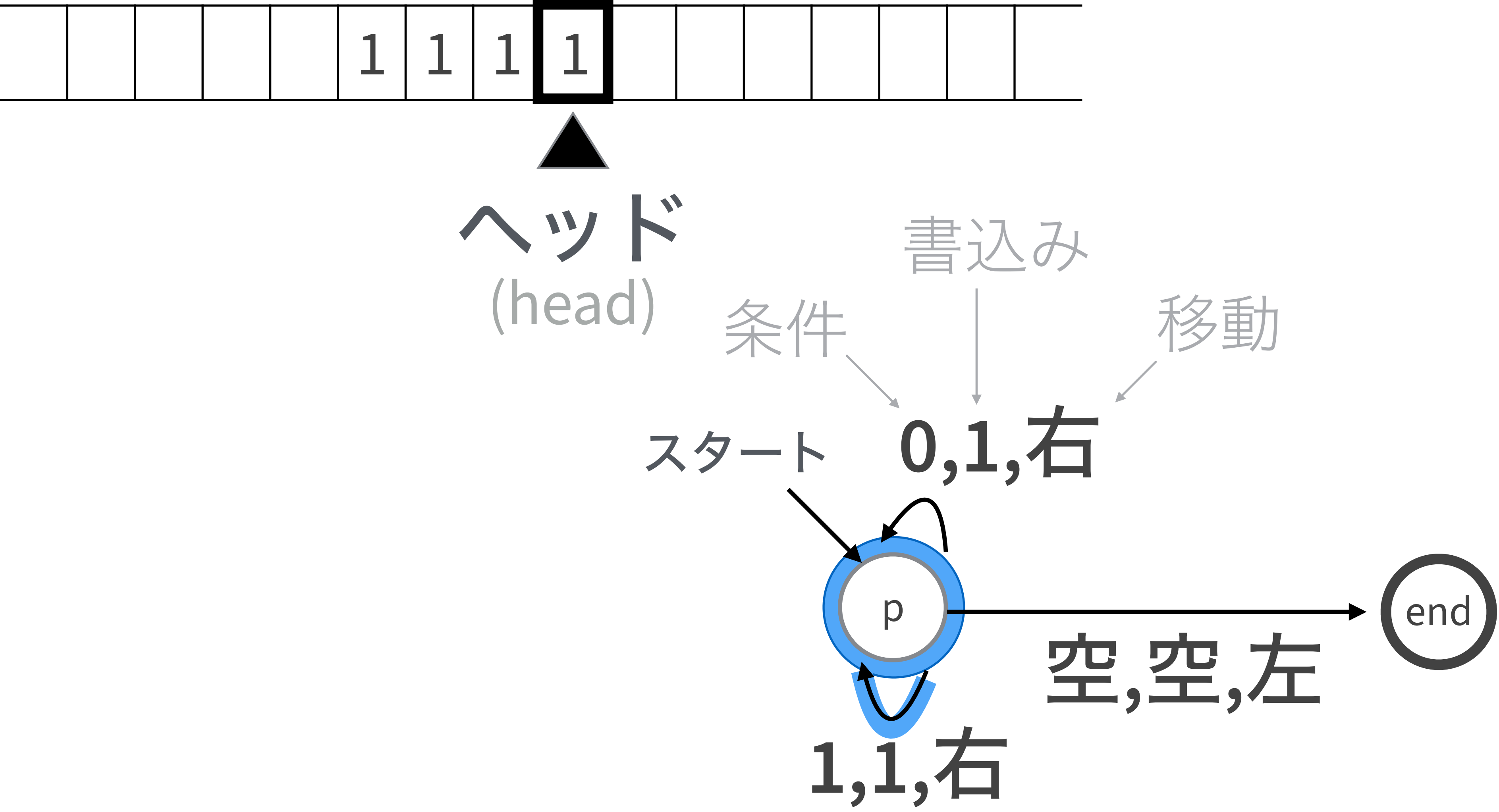
チューリングマシン (チューリング機械)



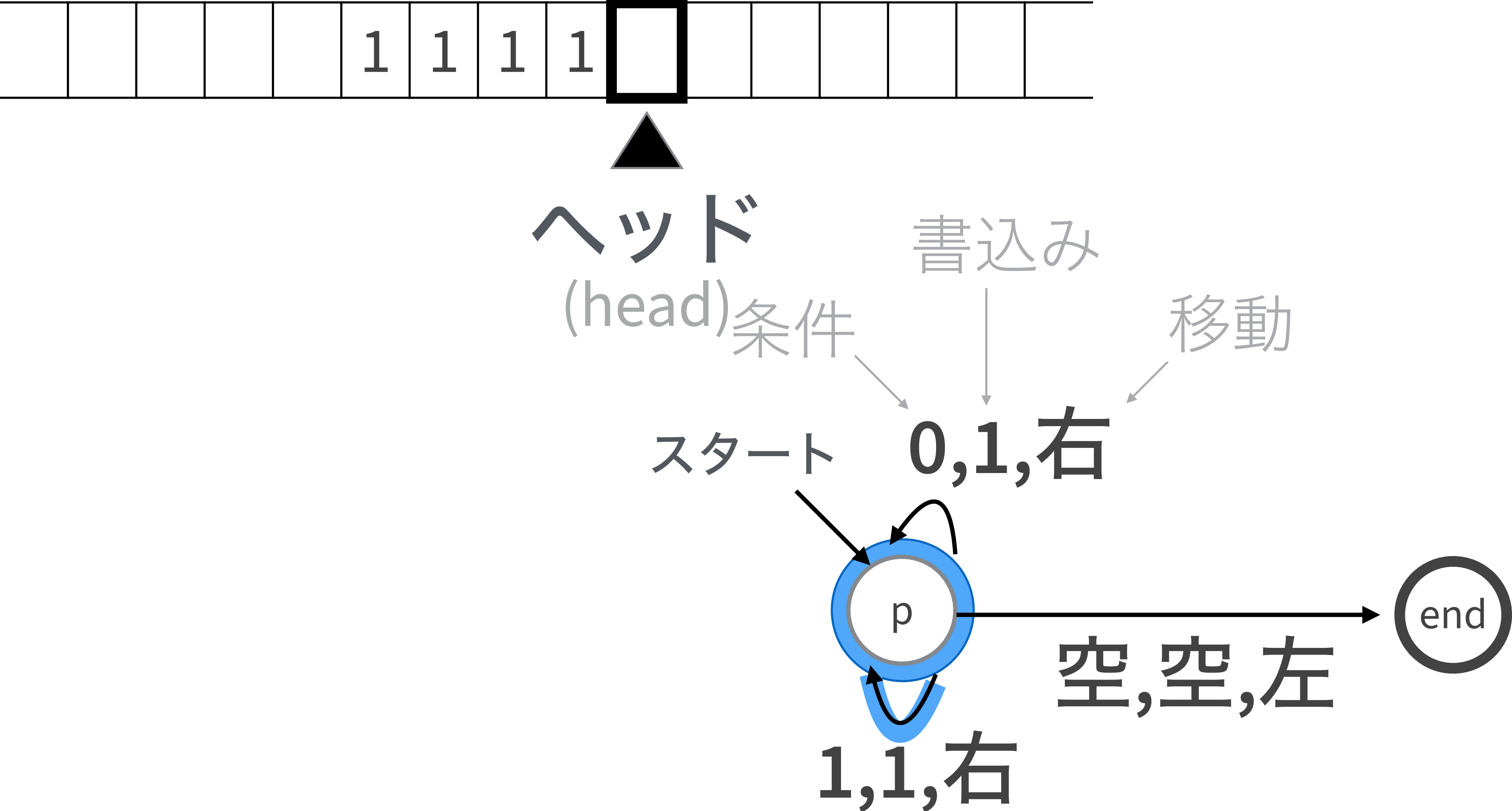
チューリングマシン (チューリング機械)



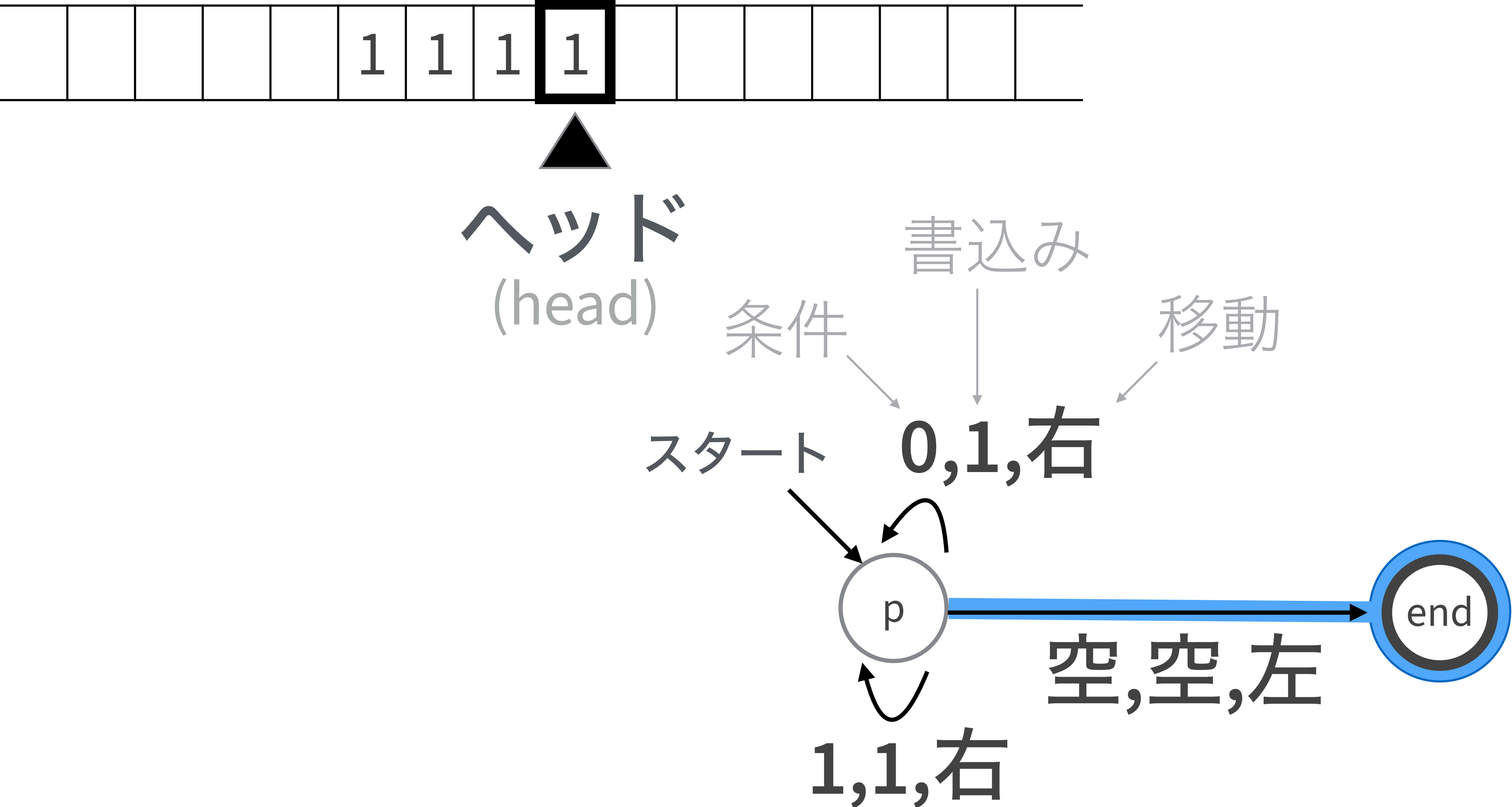
チューリングマシン (チューリング機械)



チューリングマシン (チューリング機械)



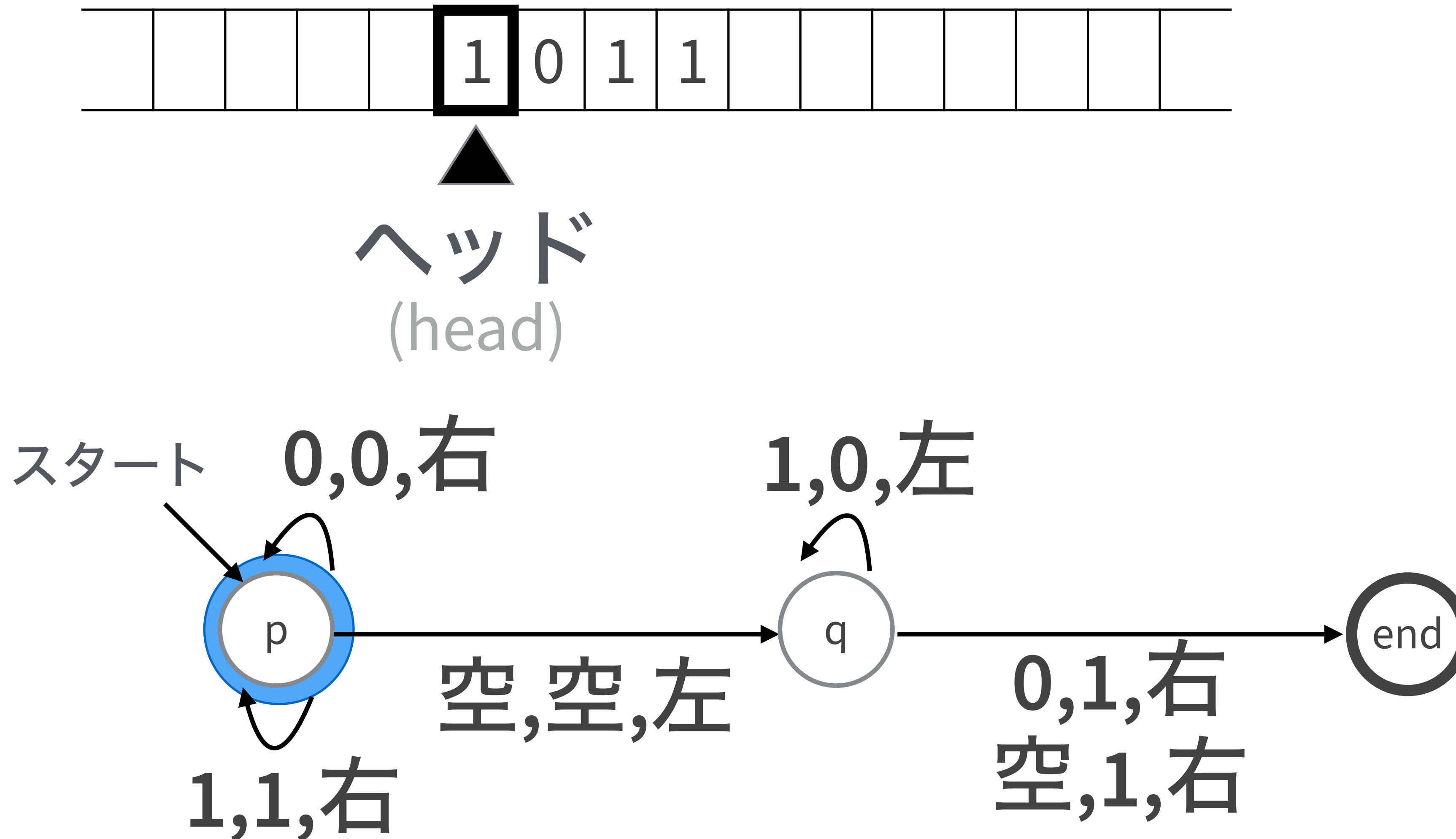
チューリングマシン (チューリング機械)



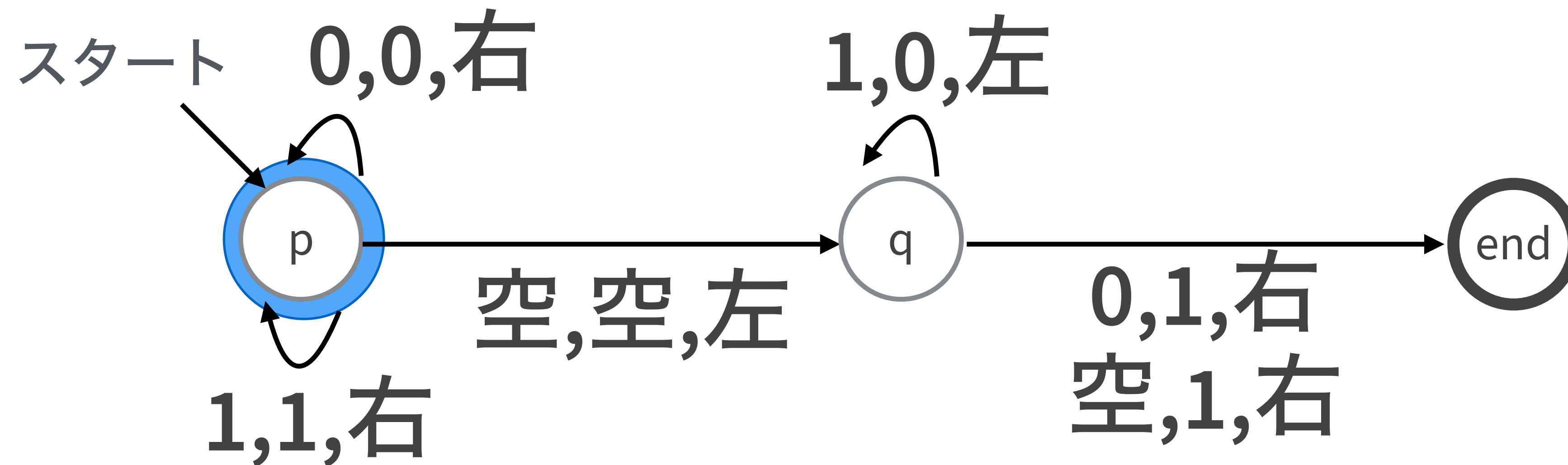
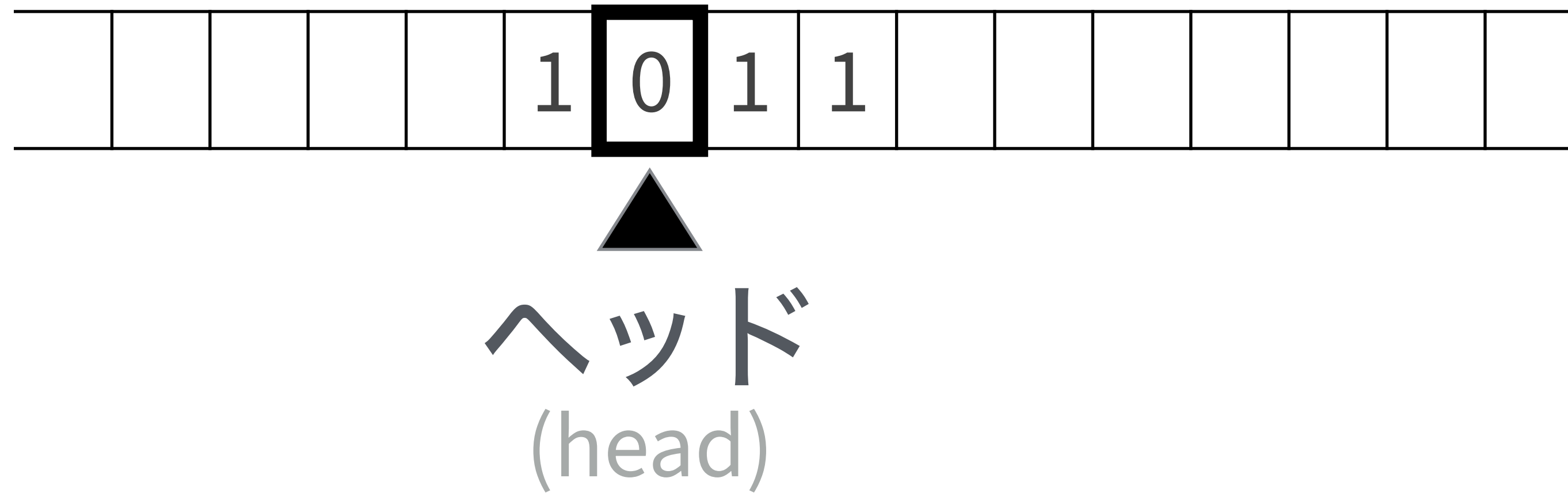
例 2 : ?

例2：？

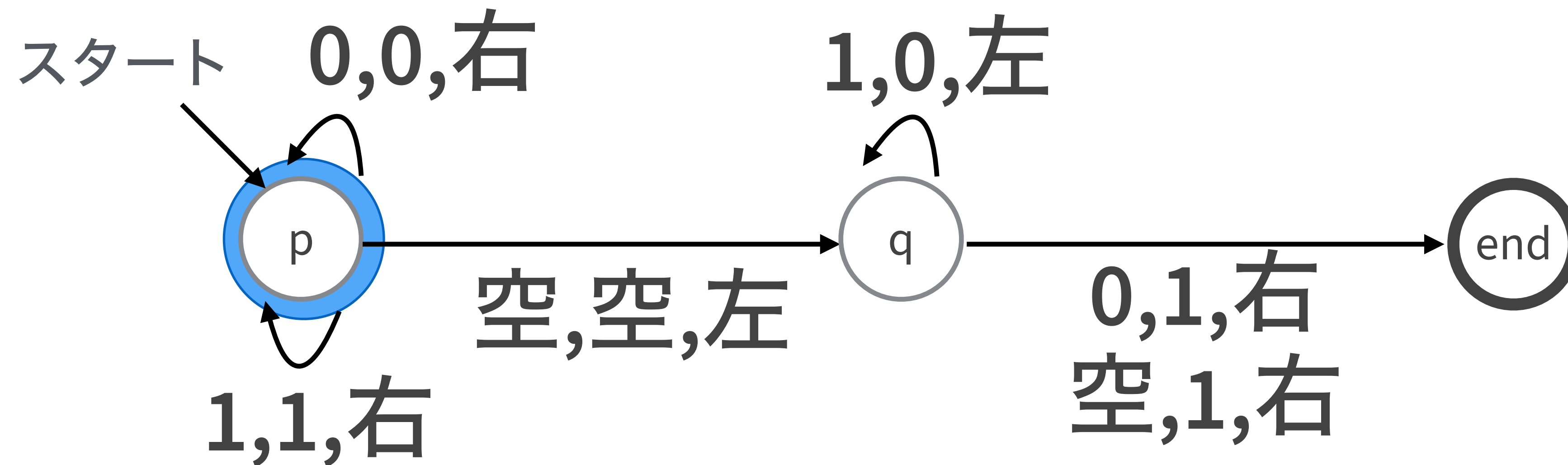
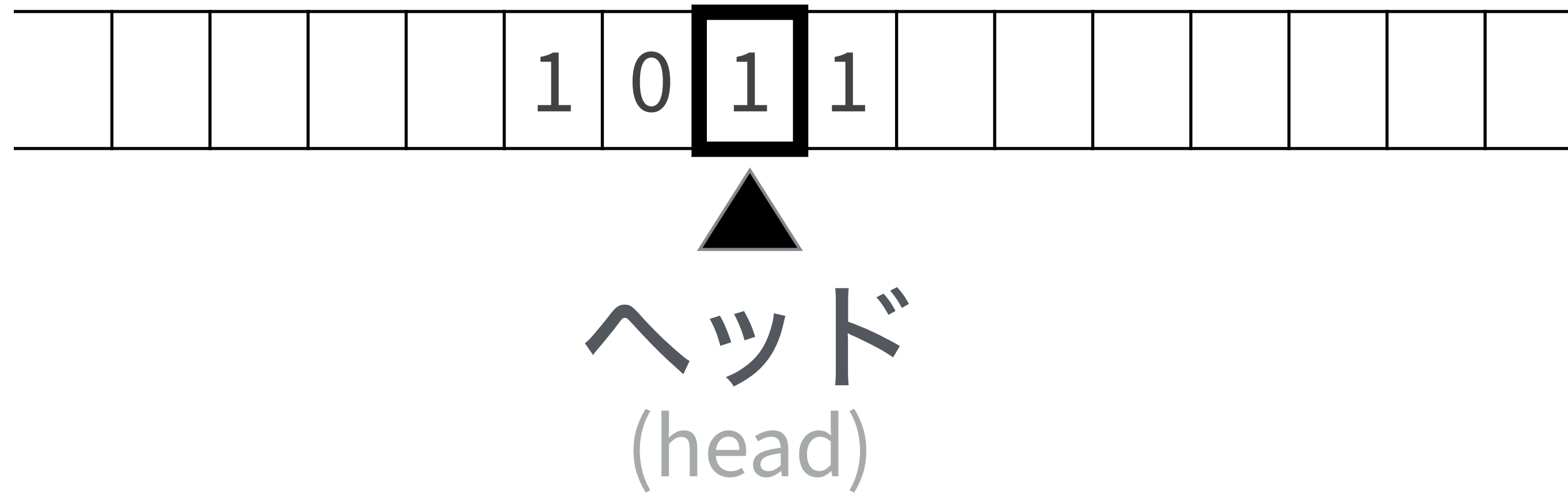
出力は何になる？



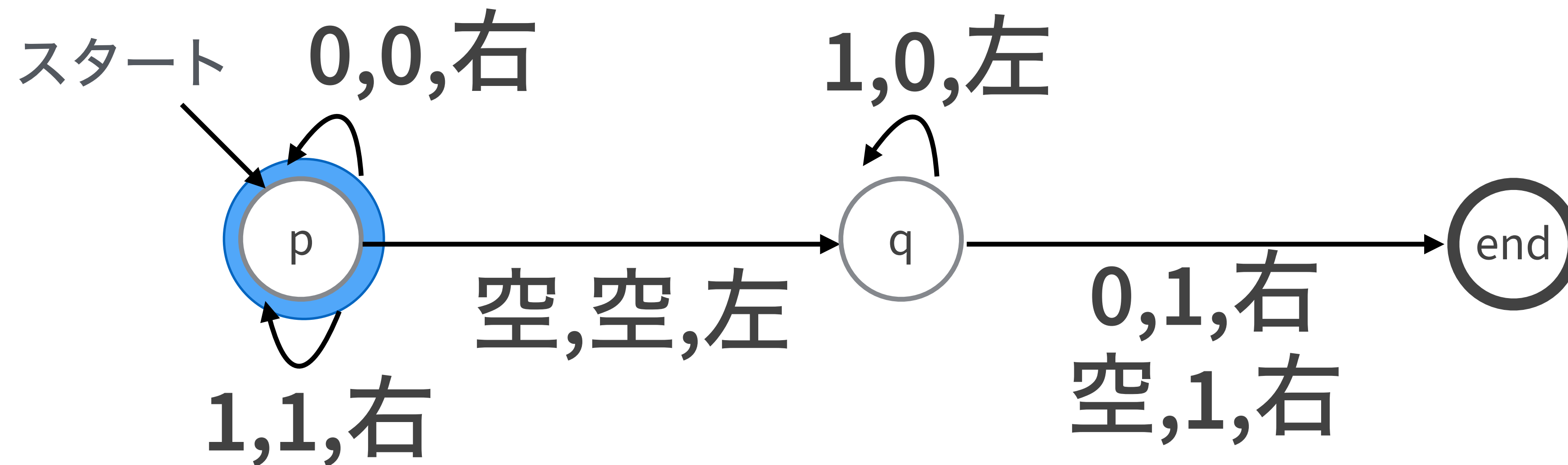
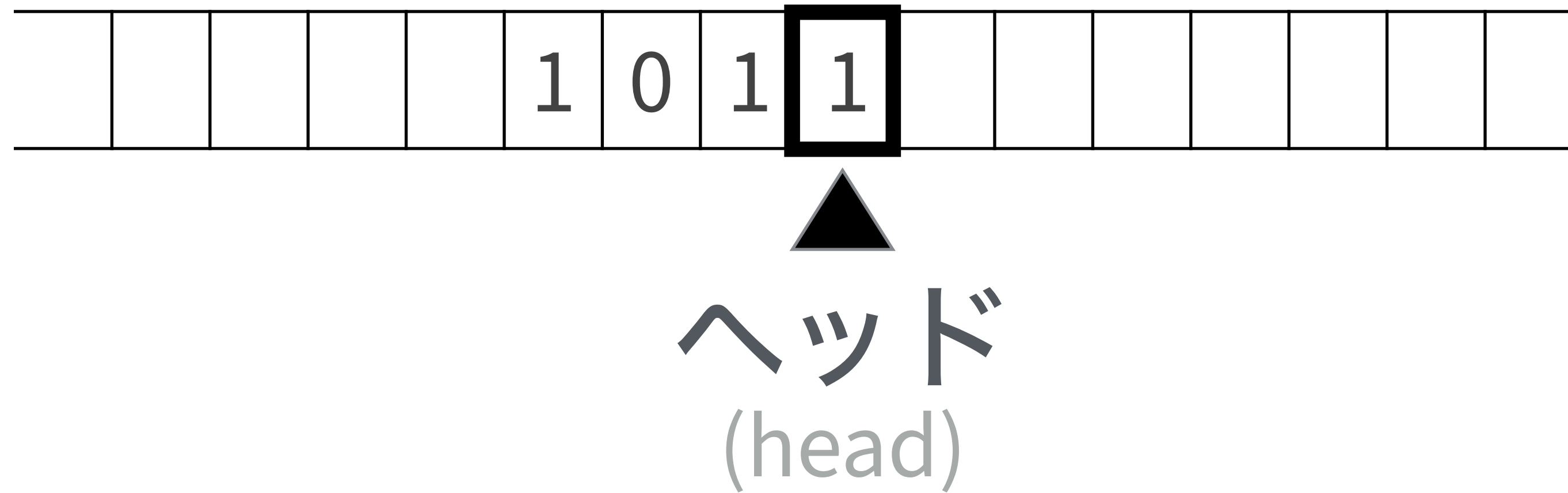
例2 : ?



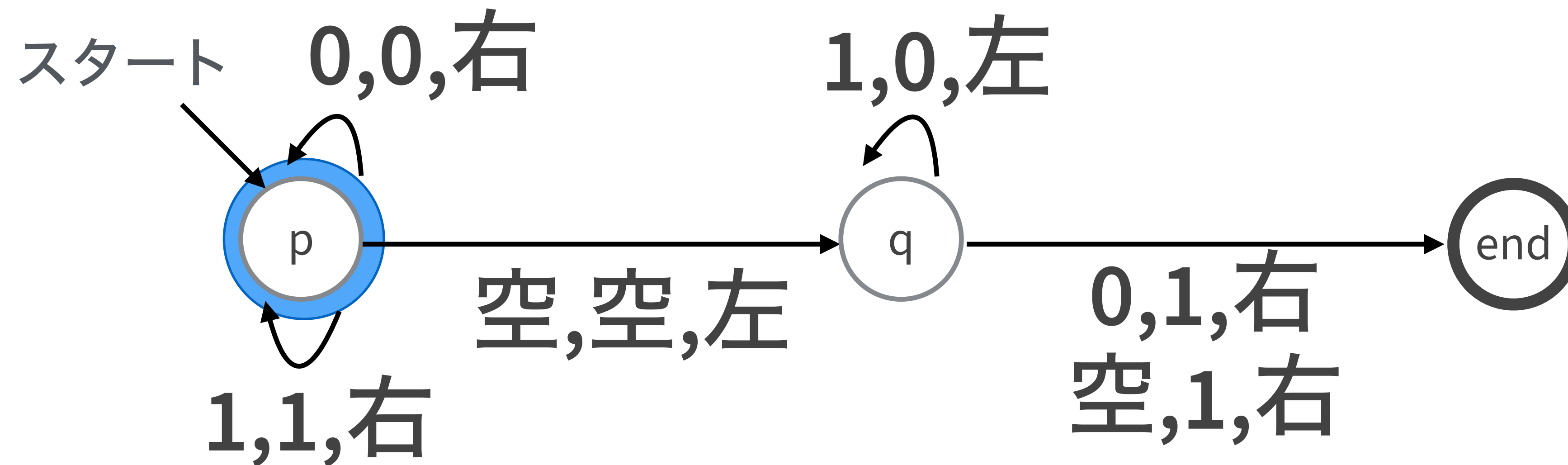
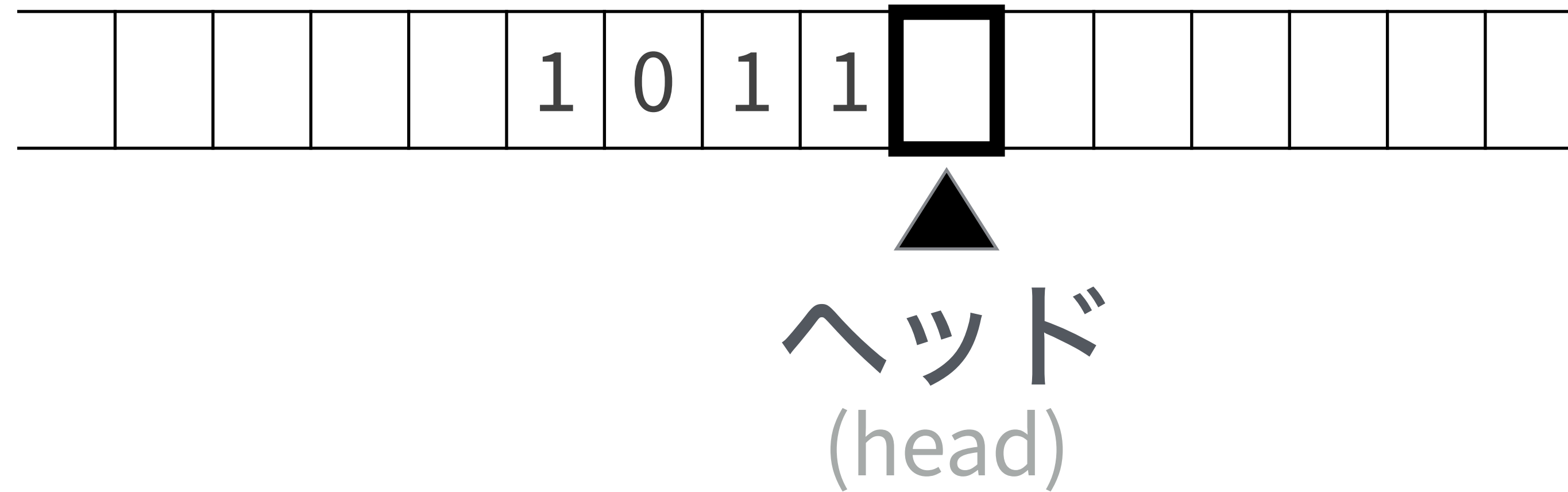
例2 : ?



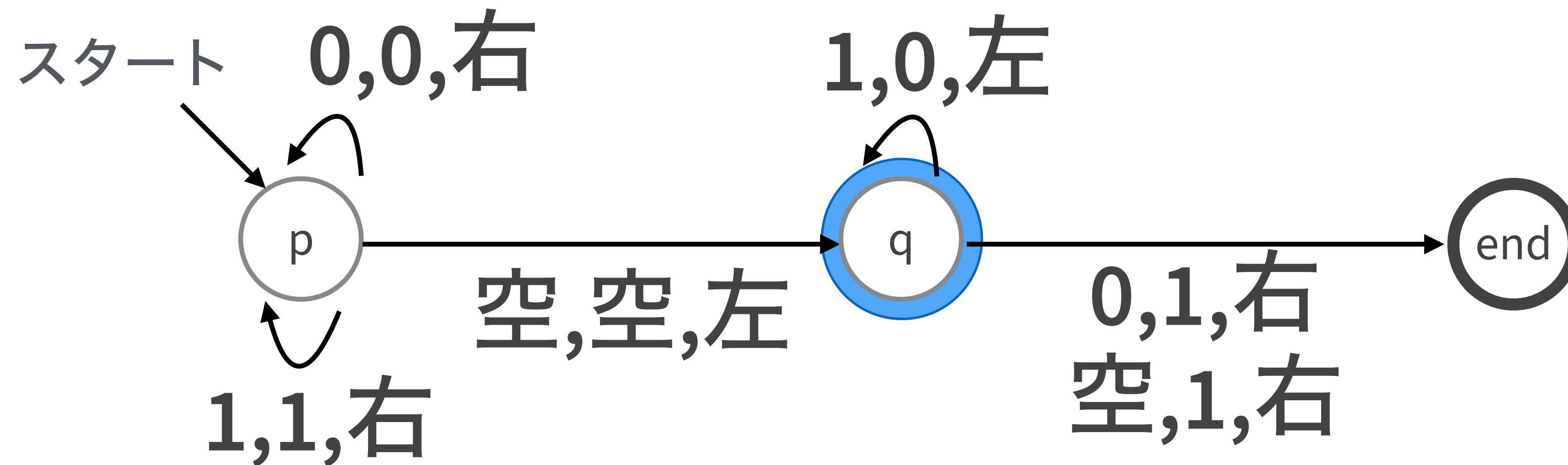
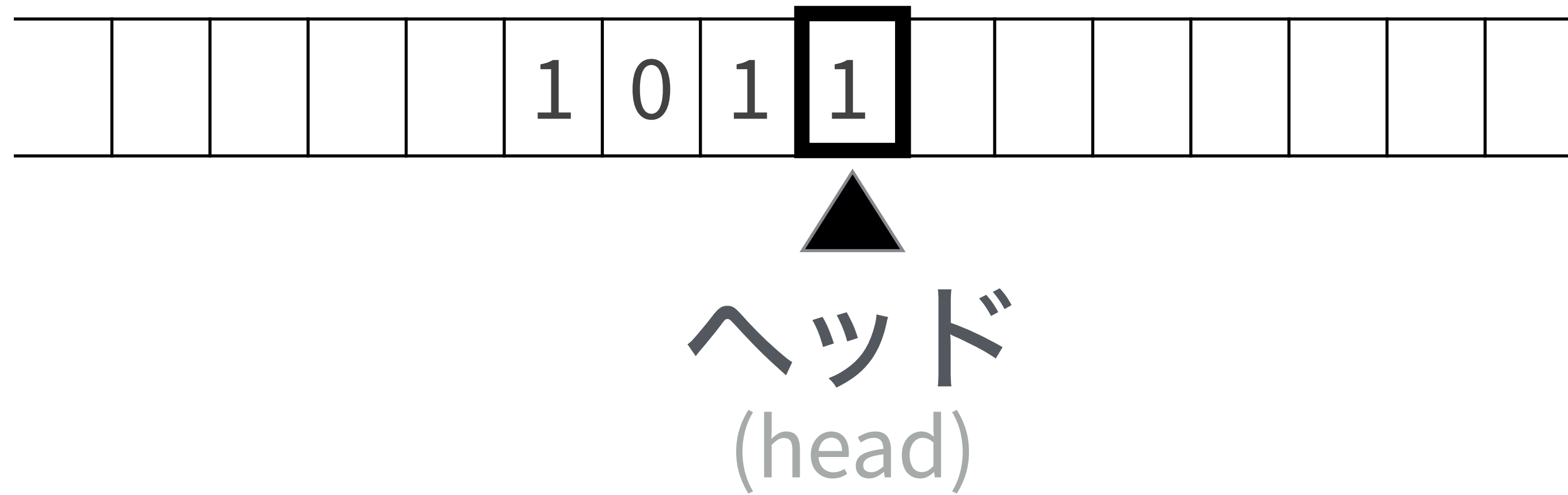
例2 : ?



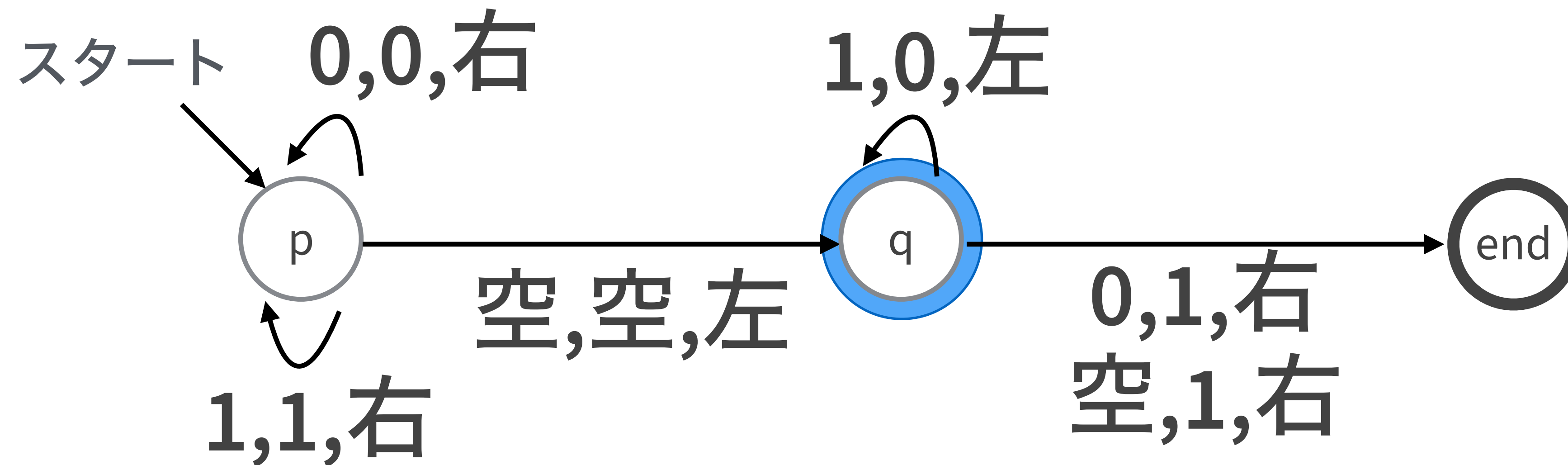
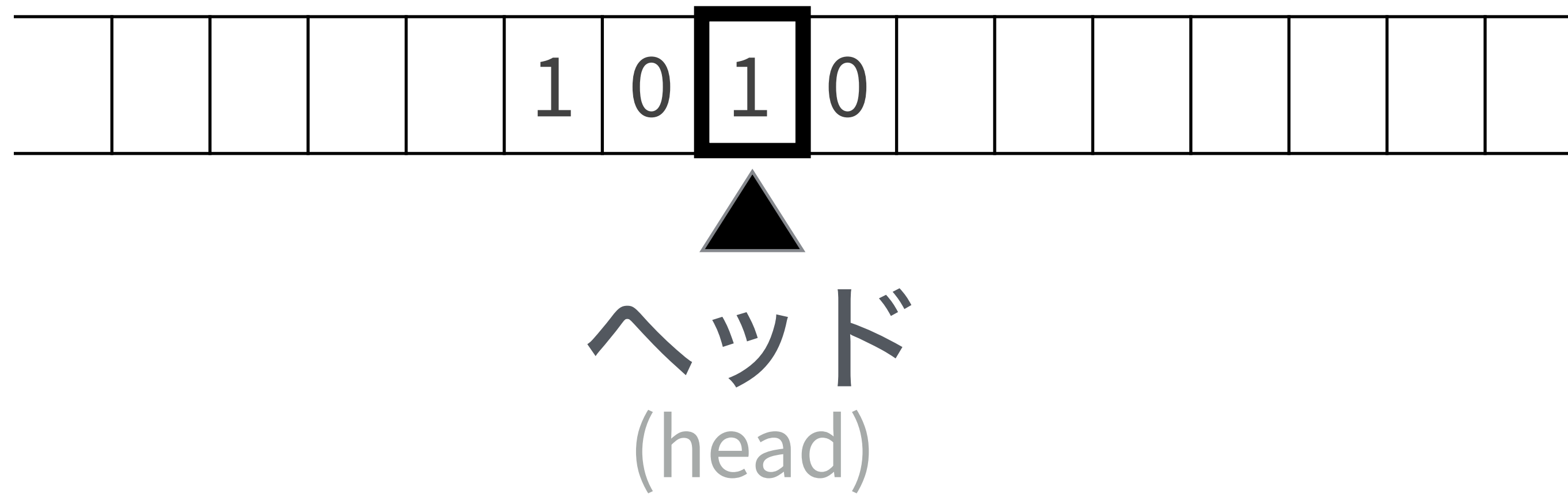
例2 : ?



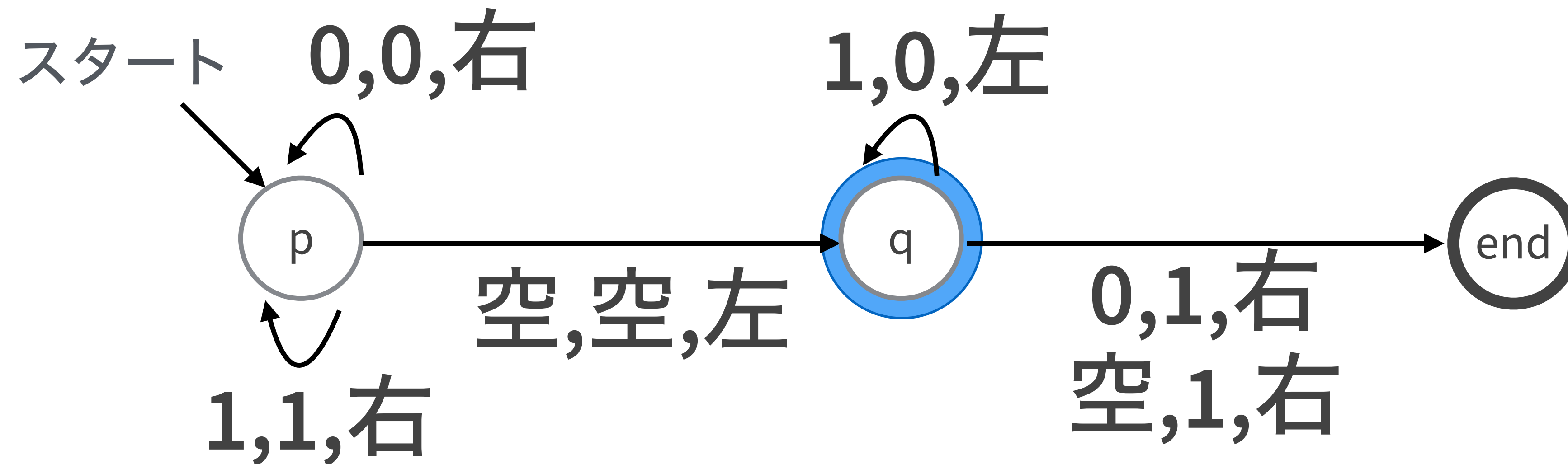
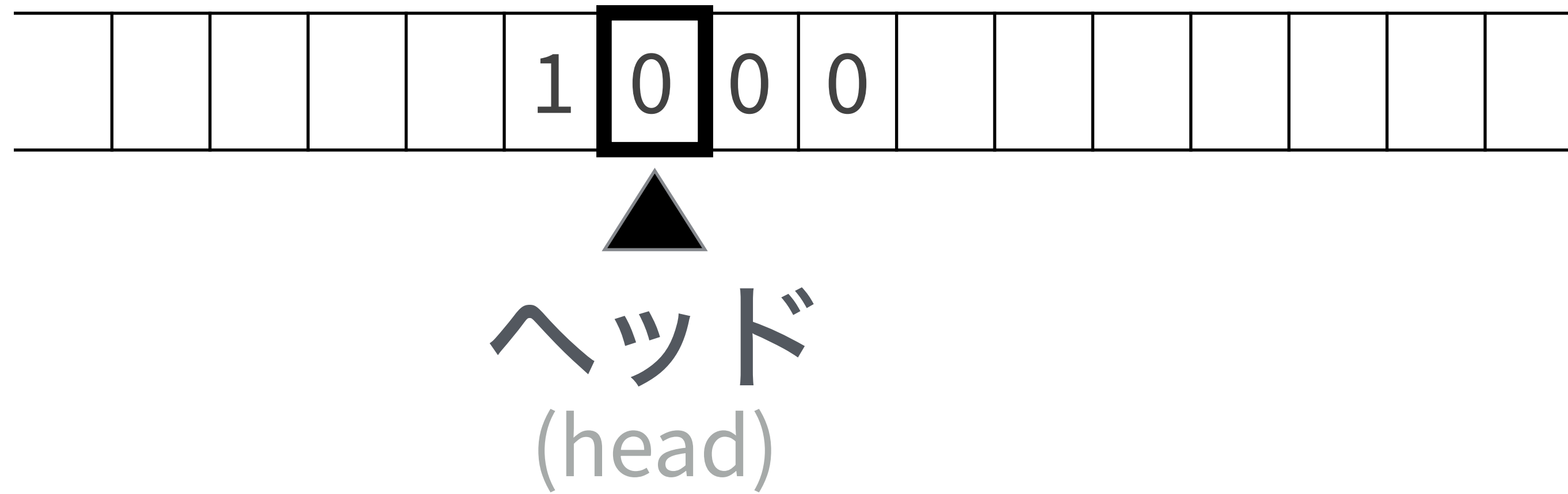
例2 : ?



例2 : ?

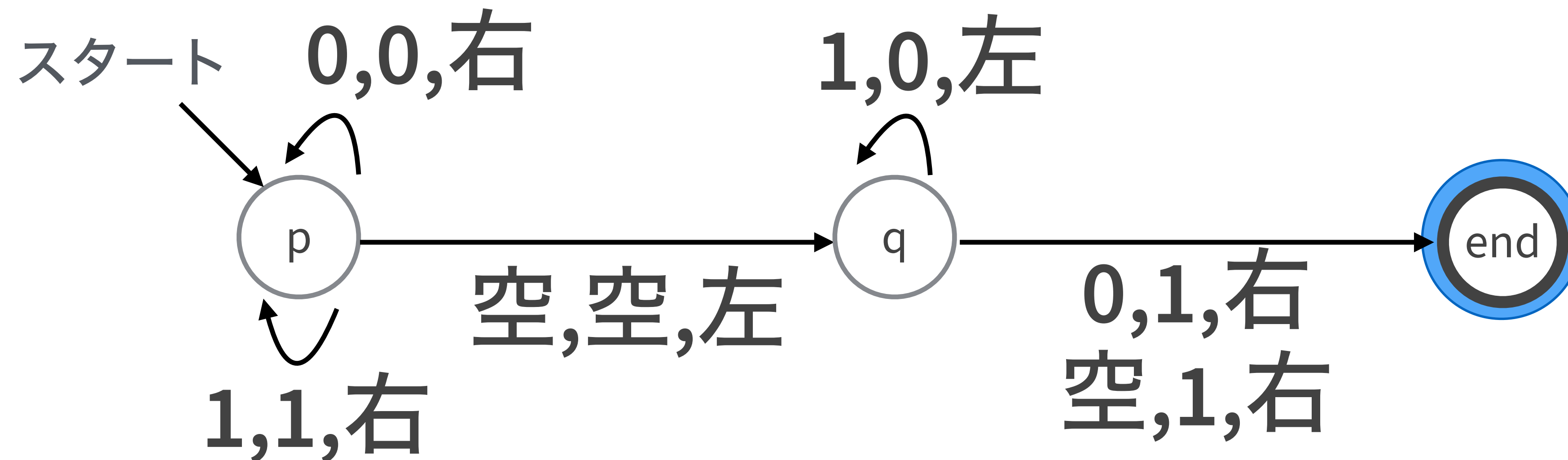
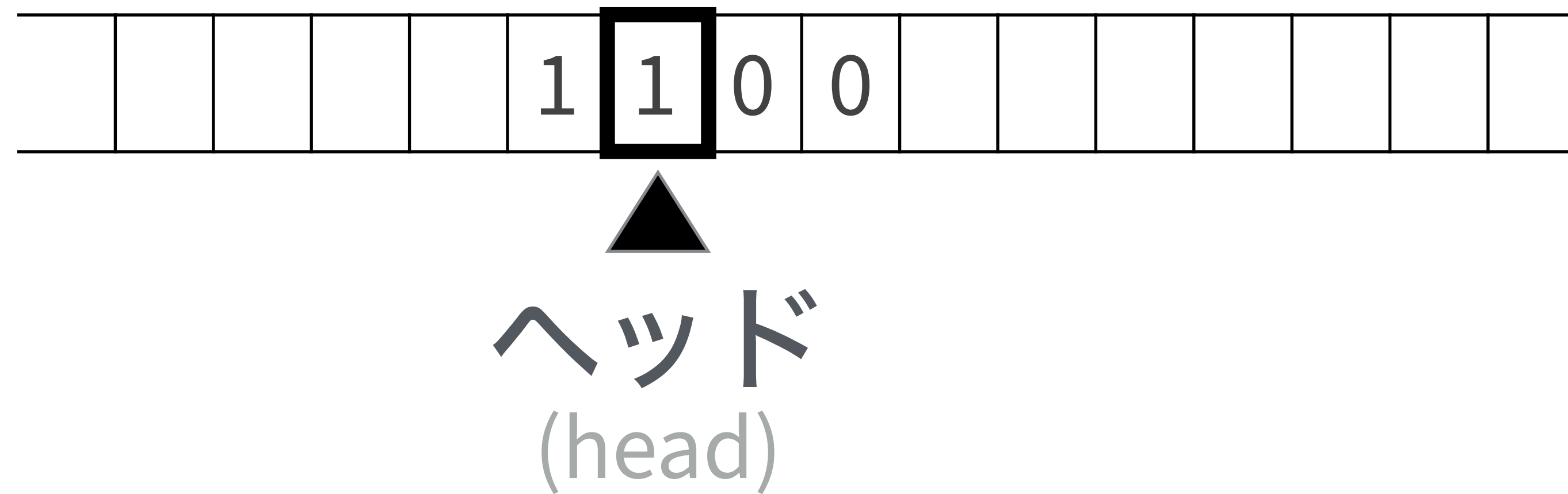


例2 : ?



例2 : ?

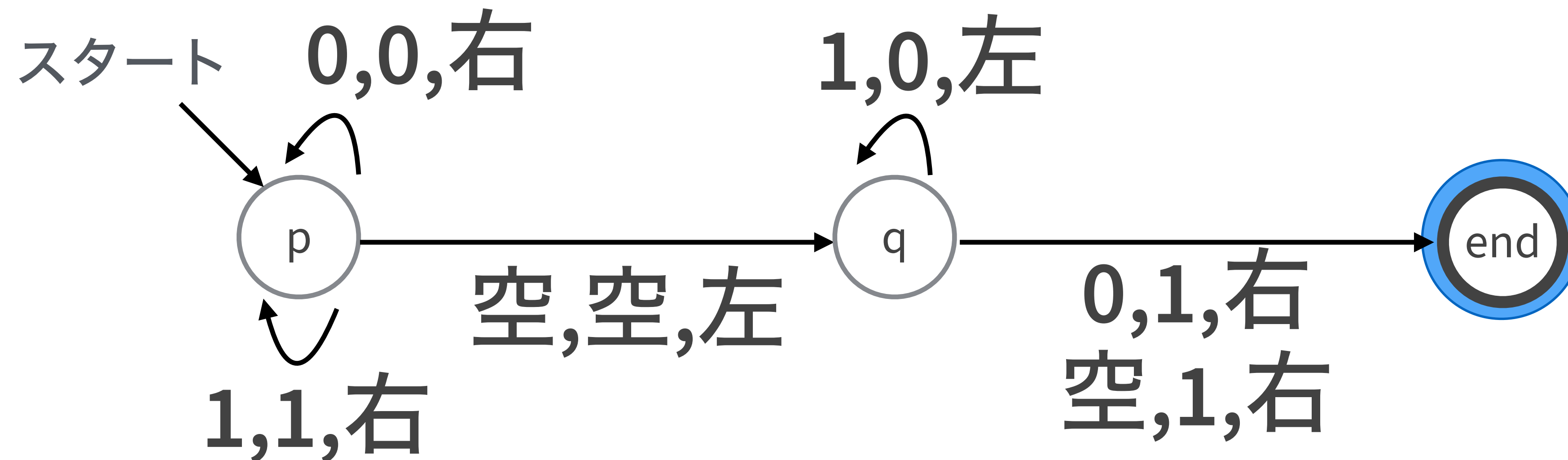
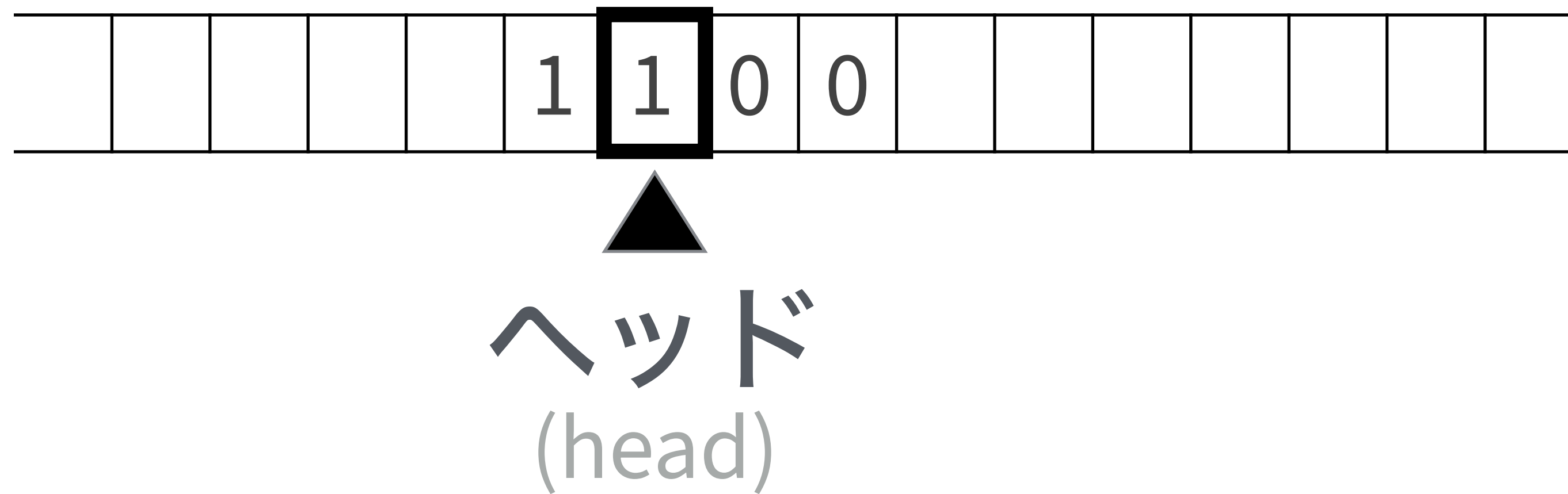
入力 : 1011
出力 : 1100



例2 : Succ (2進数の次の値)

入力 : 1011

出力 : 1100



Succ(0) = 1

Succ(1) = 10

Succ(10) = 11

...

Succ(1011) = 1100

Succ(1100) = 1101

...

Succ(1111) = 10000

...

名称	内容
剰余	x に $y \div z$ の余りを入れる
割り算	x に $y \div z$ の値を入れる
掛け算	x に $y \times z$ の値を入れる
大小判定	$x > y$? の判定結果で分岐する
引き算	x に $y - z$ の値を入れる
足し算	x に $y + z$ の値を入れる
0 代入	x の値を 0 にする
コピー	x に y の値を入れる
増	x の値を 1 増やす
減	x の値を 1 減らす
0 判定	$x = 0$? の判定結果で分岐する

...だけあれば十分

0 代入 Zero(x)

- 1. もし $x = 0$? ならば終了
- 2. x を減らす
- 3. 第1行から繰り返す

足し算 Add(x, y, z):

- 1. x に y の値をコピーする
- 2. t に z の値をコピーする
- 3. もし $t = 0$? ならば終了
- 4. x を増やす
- 5. t を減らす
- 6. 第3行から繰り返す

足し算 Mult(x, y, z):

- 1. x に y の値をコピーする
- 2. t に z の値をコピーする
- 3. もし $t = 0$? ならば終了
- 4. Add(x, x, z) を計算する
- 5. t を減らす
- 6. 第3行から繰り返す

...など

名称	内容
増	x の値を 1 増やす
減	x の値を 1 減らす
0 判定	$x = 0$? の判定結果で分岐す

元素

増やす

減らす

0 判定

議論

計算可能なことを全て計算ができる

...がなに？

チューリング機械のシミュレーションするのチューリング機械

Universal(...)

プログラム

例

遷移

入力

Universal(p,0,0,R,p;p1,1,R,p;p,BL,BL,L,q;q,1,0,L,q;q,0,1,R,end;q,BL,1,R,end;; 1011)

= Succ(1011) = 1100

Universal(1,x,BL,R,2;1,y,BL,R,3;2,x,x,R,2;2,y,x,L,3;2,BL,x,L,3;; xxyyxy)

= Erase(xxyyxy) = xxyxy

本日のまとめ

- コンピュータは情報を扱う機械
- データの元素は0と1
- 計算の数学モデル：チューリング機械
- 万能チューリング機械
- 元素の例：コピー，増，減，0判定
- 元素で計算可を全て計算できる